



PRIMARIA

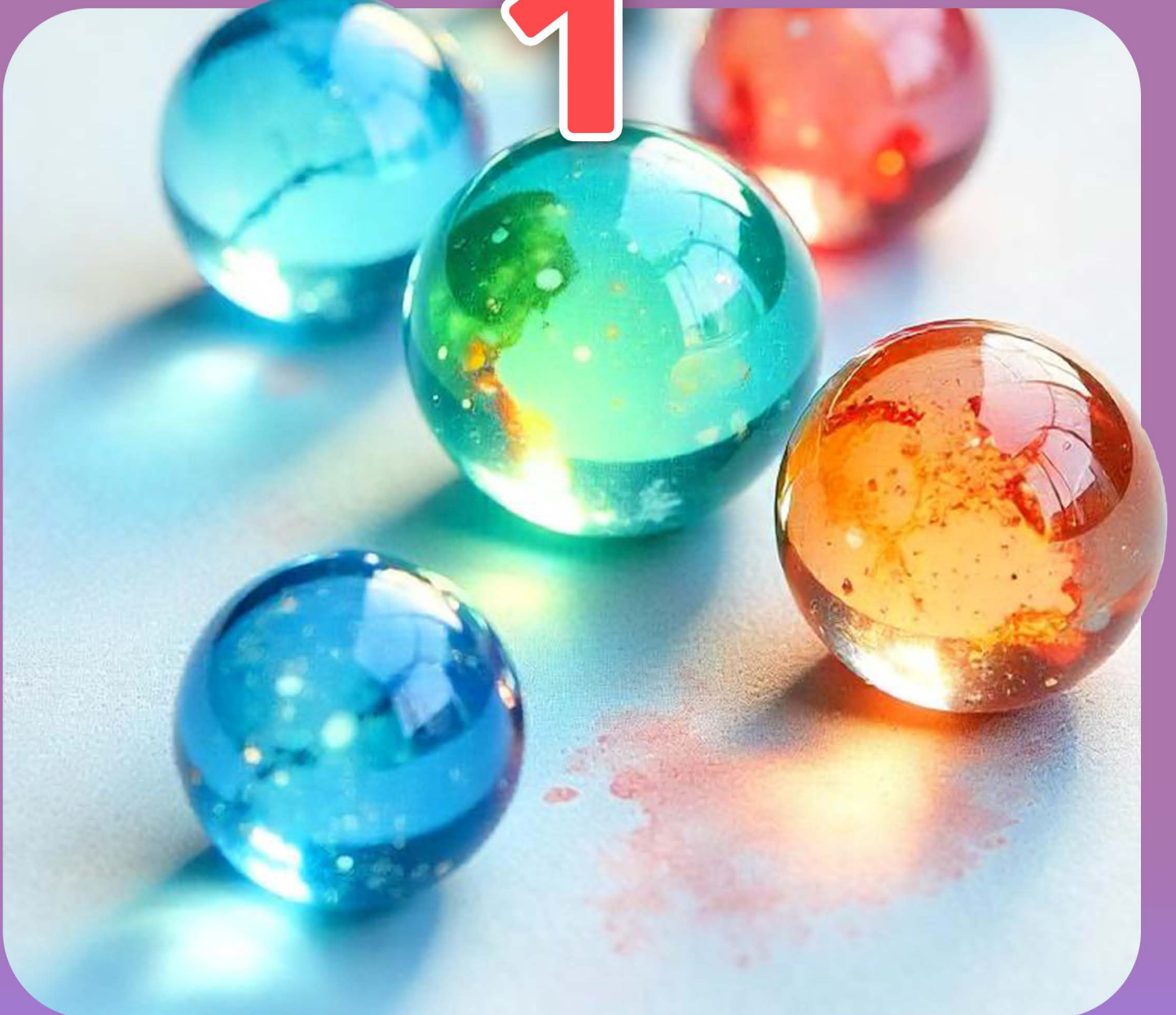
EXAMEN DIAGNÓSTICO 3



Soy
INAEBA

PENSAMIENTO MATEMÁTICO

1



Guía de Pensamiento matemático 1

Números naturales

Desde un inicio, la humanidad ha buscado formas de representar lo que cuenta, de esta manera nacen los números naturales.

El conjunto de **números naturales** se simboliza con una **N**:

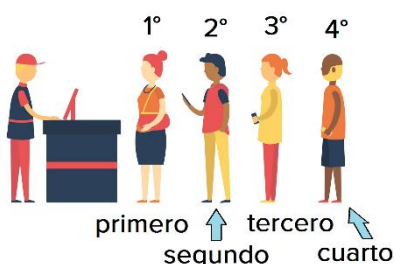
$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \dots\}$$

Un **conjunto** es una colección de elementos que tienen algo en común; en este caso es de números. Se representa con una inicial (N) que le da nombre y sus elementos se agregan entre llaves y separados por comas. Si es muy grande, se usan puntos suspensivos al final para indicar que la lista sigue.

Algunas **características** de los números naturales son:

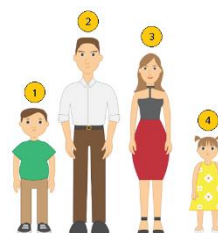
- Su orden es creciente, es decir de menor a mayor.
- Son infinitos: siempre habrá un número natural mayor a otro.
- Pueden compararse entre sí: ver si un número es mayor que, igual a, o menor que otro.
- Se usan para hacer operaciones como suma, resta, multiplicación y división.

Además, pueden ser cardinales u ordinales.



Los **números cardinales** se utilizan para contar cantidades exactas de personas, animales o cosas. Por ejemplo, contar el número de miembros de una familia.

Los **números ordinales** se usan para indicar el orden que ocupa una persona, animal o cosa en una sucesión ordenada. Por ejemplo, contar el orden en que se encuentran unas personas en la fila.



El **cero** (0) indica que no hay nada que contar, es decir, la ausencia de un objeto. Sin embargo, es fundamental en los números naturales porque permite escribir o representar muchas cantidades que se utilizan en la vida diaria, por ejemplo, al número 4001, pero si se coloca a la izquierda de un número natural, tampoco tiene valor. Por ejemplo: 05 es igual a 5, mientras que 004 es igual a 4.

Del 0 al 9 se les llaman dígitos porque se pueden contar con los dedos. El sistema de numeración que se usa es decimal porque se basa en diez cifras cuyo valor depende de la posición en que se encuentren al formar una cantidad.

Del 10 en adelante se agrupan los dígitos para construir números más grandes, se leen de izquierda a derecha, de mayor a menor valor, por ejemplo, 28 veintiocho, 593 quinientos noventa y tres.

En la antigüedad diversas civilizaciones usaban su forma de representar los números, los números romanos fueron sustituidos cuando los árabes conquistaron parte de Europa y llevaron los **números arábigos**, estos son el sistema más extendido y utilizado en la actualidad, ya que presenta la ventaja de poder generar con muy pocos signos, de forma inequívoca y concisa, una serie ilimitada de números. Sin embargo, en ocasiones se siguen usando los **números romanos**, por ejemplo, en las leyes: Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos, Ley Federal del Trabajo, Ley General de niñas, niños y adolescentes; en los nombres de reyes o de papas: Carlos V, Juan Pablo II; en ciertas ceremonias o sucesos periódicos: olimpiadas, festivales; en los capítulos de libros; para nombrar los siglos: siglo xix, siglo xxi; para medir las horas en algunos relojes, entre otras cosas.

Para escribir estos **números romanos** se emplean siete letras:

I uno, **V** cinco, **X** diez, **L** cincuenta, **C** cien, **D** quinientos, **M** mil

En la siguiente tabla se muestran los números romanos más comunes.

Números arábigos	Números romanos	Números arábigos	Números romanos	Números arábigos	Números romanos
1	I	11	XI	30	XXX

2	II	12	XII	40	XL
3	III	13	XIII	50	L
4	IV	14	XIV	60	LX
5	V	15	XV	70	LXX
6	VI	16	XVI	80	LXXX
7	VII	17	XVII	90	XC
8	VIII	18	XVIII	100	C
9	IX	19	XIX	500	D
10	X	20	XX	1000	M

Características:

-Los números pueden repetirse hasta tres veces, menos V, L y D.
-Para escribir un número antes de alguno que termine en 5 o en 0, se escribe el número anterior. Por ejemplo, 4 se escribe IV, 9 se escribe IX, 19 se escribe XIX.

Ejemplos:

Números arábigos	Números romanos	Números romanos	Números arábigos
8	VIII	VI	6
24	XXIV	XLIV	44
49	XLIX	LXXIX	79
137	CXXXVII	CCLXIV	264
494	CDXCIV	DCCCXCIX	899

Se le conoce como **sistema decimal** a la forma de contar agrupando las

cantidades de diez en diez. El número 1 es la unidad básica para contar y es el más pequeño que tiene valor. Diez unidades forman una **decena**, diez decenas completan una **centena** o 100 unidades, si juntamos 10 centenas se obtienen un **millar** o 1000 unidades. Si se agregan más unidades de millar, se acumulan **decenas de millar** o **centenes de millar**, al acumular mil millares se obtiene un **millón**.

Unidades de millón	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
8	4	6	2	3	9	7

El **valor posicional** o **relativo** indica cuánto vale un dígito dependiendo de la posición que ocupa en una cifra completa. En el número del ejemplo 8 **462** 397, el **3** está en la posición de las centenas y su valor relativo es de 300, el **6** está en la posición de las decenas de millas y su valor relativo es de 60 000.

El **valor absoluto** es el que tiene un número, sin importar el lugar que ocupa en una cifra. El valor absoluto de 2 siempre será 2, no importa la posición en que se encuentre.

Ahora revisaremos la forma como se escriben los números cardinales:

0	cero	10	diez	20	veinte	30	treinta
1	uno	11	once	21	veintiuno	31	treinta y uno
2	dos	12	doce	22	veintidós	32	treinta y dos
3	tres	13	trece	23	veintitrés	40	cuarenta
4	cuatro	14	catorce	24	veinticuatro	50	cincuenta
5	cinco	15	quince	25	veinticinco	60	sesenta
6	seis	16	dieciséis	26	veintiséis	100	cien
7	siete	17	diecisiete	27	veintisiete	110	ciento diez
8	ocho	18	dieciocho	28	veintiocho	1000	mil
9	nueve	19	diecinueve	29	veintinueve	2000	dos mil

A partir del número 30, se agrega "y" para seguir con la cuenta, como se indica.

Ejemplos. Escribe con letras los siguientes números: 45, 78, 124, 3 692, 104 303 y 3 620 891.

45	Cuarenta y cinco	3 692	Tres mil seiscientos noventa y dos
78	Setenta y ocho	104 303	Ciento cuatro mil trescientos tres
124	Ciento veinticuatro	3 620 891	Tres millones seiscientos veinte mil ochocientos noventa y uno

Para la comparación de números se utilizan los siguientes signos:

Signo	Se llama	Ejemplo	Se lee
<	Menor que	$19 < 31$	Diecinueve es menor que treinta y uno.
>	Mayor que	$82 > 67$	Ochenta y dos es mayor que sesenta y siete.
=	Igual a	$584 = 584$	Quinientos ochenta y cuatro es igual a quinientos ochenta y cuatro

Ejemplos. Escribe con letra las siguientes comparaciones.

$24 > 19$ Veinticuatro es mayor que diecinueve
 $67 = 67$ Sesenta y siete es igual a sesenta y siete
 $78 < 91$ setenta y ocho es menor que noventa y uno

Recuerda que, a diferencia de los cardinales, los números ordinales son aquellos que indican el orden de las cosas: qué va primero, qué va en segundo lugar, qué va en tercer lugar, y así sucesivamente.

Para nombrar los **números ordinales**, se coloca como símbolo a un pequeño círculo en la parte de arriba y a la derecha (°), por ejemplo, 46° se lee “cuadragésimo sexto”.

Observa la manera como se escriben los números ordinales:

1°	primero	10°	décimos
2°	segundo	20°	vigésimo
3°	tercero	30°	trigésimo
4°	cuarto	40°	cuadragésimo
5°	quinto	50°	quincuagésimo
6°	sexto	60°	sexagésimo
7°	séptimo	70°	septuagésimo
8°	octavo	80°	octogésimo
9°	noveno	90°	nonagésimo

Ejemplos. Escribe con números las siguientes cantidades:

a) décimo primero 11°
b) Vigésimo cuarto 24°
c) Sexagésimo sexto 66°
d) Octogésimo noveno 89°
e) Nonagésimo quinto 95°
f) Septuagésimo octavo 78°

Problemas de suma y resta con números naturales

La **suma** (adición) de dos o más cantidades significa unirlos entre sí. Se utiliza el signo + (más) y al total se le conoce como resultado y se pone después del signo = (igual a). Las cantidades que se suman se llaman **sumandos** y el resultado es la **suma o total**.

sumandos

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ 5 + 3 = 8 \end{array} \quad \leftarrow \text{total o suma}$$

Propiedades de la suma:

Propiedad	Se lee	Ejemplo
Conmutativa	El orden de los sumandos no altera el total	$9 + 6 = 6 + 9 = 15$
Asociativa	Sumar por partes y el resultado es el mismo	$(9 + 8) + 5 = 17 + 5 = 22$ $9 + (8 + 5) = 9 + 13 = 22$
Elemento neutro	Al sumar el cero (0) da el mismo resultado	$13 + 0 = 13$

La **resta** (sustracción) es quitarle a la primera cantidad (**minuendo**) la segunda (**sustraendo**), se utiliza el signo – (menos) y el resultado es la **diferencia**. La resta es la operación contraria a la suma, pero la resta no presenta propiedades conmutativa ni asociativa.

sustraendo

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ 7 - 3 = 4 \\ \uparrow \\ \text{minuendo} \end{array} \quad \leftarrow \text{diferencia}$$

Para la adición y resta de cantidades grandes se utilizan la forma vertical, esto es alineando las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, las centenas con las centenas y así sucesivamente.

Por ejemplo, sumar 18 469 más 5 138 más 47 523.

- 1 Primero se acomodan una arriba de la otra. ➡ 2 Después, se suman las unidades con las unidades. ➡ 3 A continuación, se suman las decenas.

Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
1	8	4	6	9
+	5	1	3	8
4	7	5	2	3

Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
1	8	4	6	9
+	5	1	3	8
4	7	5	2	3
				0

$$9 + 8 + 3 = 20$$

Se escribe el 0 debajo de las unidades y decimos que "se llevan" 2 decenas.

Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
1	8	4	6	9
+	5	1	3	8
4	7	5	2	3
				0

$$2 + 6 + 3 + 2 = 13$$

Se escribe el 3 debajo de las decenas y decimos que "se lleva" 1 centena.

- 4 Ahora se suman las centenas. ➡ 5 Luego, se suman los millares.

Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
1	8	4	6	9
+	5	1	3	8
4	7	5	2	3
				0

$$1 + 4 + 1 + 5 = 11$$

Se escribe el 1 debajo de las centenas y decimos que "se lleva" 1 unidad de millar

Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
2	1	1	2	
1	8	4	6	9
+	5	1	3	8
4	7	5	2	3
1	1	3	0	

$$1 + 8 + 5 + 7 = 21$$

Se escribe el 1 debajo de las unidades de millar y decimos que "se lleva" 2 decenas de millar



6

Para terminar, se suman las decenas de millar.

$$2 + 1 + 4 = 7$$

Se escribe el 7 debajo de las decenas de millar

Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
2	1	1	2	
1	8	4	6	9
+	5	1	3	8
4	7	5	2	3
7	1	1	3	0

El resultado de la suma es **71 130** (setenta y un mil ciento treinta).

Ejemplo para la resta, realiza la operación **38 476 menos 19 794**.

1 Primero se colocan el minuendo y sustraendo.

Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
3	8	4	7	6
-	1	9	7	9
				4

2 Después, se resta las unidades con las unidades.

Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
3	8	4	7	6
-	1	9	7	9
				4

$6 - 4 = 2$

Se escribe el 2 en las unidades

3 A continuación, se restan las decenas.

Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
3	8	4	7	6
-	1	9	7	9
				2

$10 + 7 = 17$

Le pide una centena al número de la izquierda (4), $17 - 9 = 8$ y se escribe en las decenas.

4 Ahora se restan las centenas.

Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
3	8	4	7	6
-	1	9	7	9
				2

$10 + 3 = 13$

Le pide una unidad de millar al número de la izquierda (8), $13 - 7 = 6$ y se escribe en las centenas.

5 Luego, se restan los millares.

Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
3	8	4	7	6
-	1	9	7	9
				2

$10 + 7 = 17$

Le pide una decena de millar al número de la izquierda (3), $17 - 9 = 8$ y se escribe en las unidades de millar.

6 Para terminar, se restan las decenas de millar.

Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
3	8	4	7	6
-	1	9	7	9
				2

El resultado de la resta es **18 682** (dieciocho mil seiscientos ochenta y dos).

Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
2	8	4	7	6
-	1	9	7	9
				2

Se hace la resta directamente, $2 - 1 = 1$ y se escribe en las decenas de millar.

Ejemplos: Resuelve los siguientes problemas.

1) Para un plan de reforestación se cuenta con 2 580 árboles, de los cuales se repartieron 850 para la zona A, 635 para la zona B y 798 para la zona C. ¿Cuántos árboles sobraron?

Primero, sumamos los árboles que se van a repartir.

Finalmente, hacemos la resta.

Árboles por repartir	2 580
Árboles repartidos	- 2 283
Árboles sobrantes	297

Zona A	850
Zona B	+ 635
Zona C	798
Total	2 283

2) En un barco que visita tres islas viajan 6 570 personas. En la primera isla se bajan 862 personas y suben 596 personas; en la segunda isla bajan 789 personas y suben 1 105, y en la tercera isla bajan 4 680

personas y suben 2 315 personas. ¿Cuántas personas quedaron en el barco después de viajar por las tres islas?

Primero, sumamos las que bajaron. Posteriormente, sumamos las que subieron.

	Bajaron
Primera isla	862
Segunda isla	+ 789
Tercera isla	<u>4 680</u>
Total	6 331

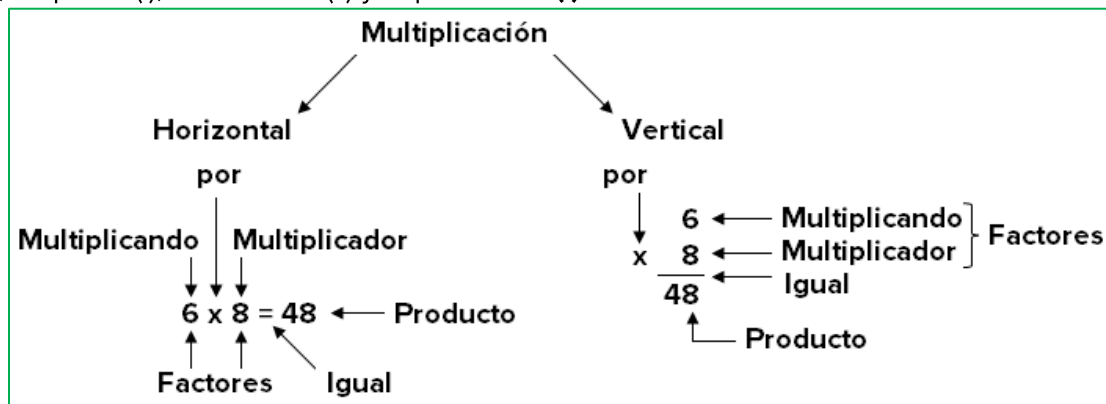
	Subieron
Primera isla	596
Segunda isla	+ 1 105
Tercera isla	<u>2 315</u>
Total	4 016

Finalmente, al total de viajeros les restamos las personas que bajaron en las islas y sumamos las que subieron.

Viajeros	6 570
Bajaron	- <u>6 331</u>
	+ 239
Subieron	<u>4 016</u>
Quedaron	4 255

Problemas de multiplicación con números naturales

La multiplicación es la suma abreviada de sumandos iguales. El número que se multiplica se le llama **multiplicando**, el número de veces que se multiplica es el **multiplicador**, a estos dos se les conoce como **factores** y el resultado es el **producto**. Los signos que se utilizan para indicar una multiplicación es una equis (x), un punto (·), el asterisco (*) y el paréntesis ().



Propiedades de la multiplicación.

Propiedad	Se lee	Ejemplo
Conmutativa	El orden de los factores no altera el producto	$6 \times 8 = 8 \times 6 = 48$
Asociativa	Agrupar los factores no altera el producto	$(6 \times 8) \times 5 = 48 \times 5 = 240$ $6 \times (8 \times 5) = 6 \times 40 = 240$
Elemento neutro	Al multiplicar por uno (1) da el mismo número	$13 \times 1 = 13$

Hay diferentes formas de resolver una multiplicación y todas son válidas si se llega al resultado correcto. Una de ellas es el empleo de tablas que contienen los resultados de las multiplicaciones del 1 al 12 y sirven de apoyo para quien está aprendiendo. Son las más comunes y por lo regular se pide a las personas que las memoricen. Por ejemplo, observa las tablas del 3.

Aunque esas tablas son muy útiles, la **tabla de Pitágoras o tabla pitagórica** junta los resultados de las multiplicaciones del 1 al 12 en una sola.

$3 \times 1 = 3$	$3 \times 6 = 18$
$3 \times 2 = 6$	$3 \times 7 = 21$
$3 \times 3 = 9$	$3 \times 8 = 24$
$3 \times 4 = 12$	$3 \times 9 = 27$
$3 \times 5 = 15$	$3 \times 10 = 30$

Tabla de Pitágoras

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

Para conocer el resultado de 9×8 , se localiza la columna vertical del 9 y en la fila horizontal del número 8; el producto está en la casilla donde se juntan ambos, es decir el número 72.

Multiplicar 468 por 9

$$\begin{array}{r} 468 \\ \times 9 \\ \hline 4212 \end{array}$$

$54 + 7 = 61$
 $36 + 6 = 42$

Se lee: cuatro mil doscientos doce

Ejemplos: a) Multiplicar 17 406 por 35.

$$\begin{array}{r} 17\,406 \\ \times 35 \\ \hline 87030 \\ 52218 \\ \hline 609210 \end{array}$$

← Multiplicar por 5 unidades } **Productos parciales**
← Multiplicar por 3 decenas }
← **Producto**

El resultado se lee: seiscientos nueve mil doscientos diez.

b) En una campaña de reforestación se planea sembrar 6 785 árboles en cada región. Si son 14 regiones, ¿cuántos árboles se sembrarán en total?

$$\begin{array}{r} 6\,785 \\ \times 14 \\ \hline 27140 \\ 6785 \\ \hline 94990 \end{array}$$

Se sembraron en total **94 990** árboles.

División de números naturales

La división es la operación contraria a la multiplicación; consiste en encontrar cuántas veces cabe una cifra en otra, si sobra es una división inexacta. Los símbolos que se utilizan para indicar una división son: $\div$, $:$, $\overline{\hspace{1cm}}$ (galera), $_$ y $/$. Las partes de una división son:

$$\begin{array}{r} \text{galera} \swarrow \\ \text{divisor} \longrightarrow 7 \overline{) 25} \\ \underline{21} \\ 4 \end{array}$$

3 ← cociente
25 ← dividendo
4 ← residuo

$$\begin{array}{r} 7 \longleftarrow \text{divisor} \\ \times 3 \longleftarrow \text{cociente} \\ \hline 21 \\ + 4 \longleftarrow \text{residuo} \\ \hline 25 \longleftarrow \text{dividendo} \end{array}$$

La división no presenta propiedad conmutativa ni asociativa, pero al igual que la multiplicación tiene elemento neutro que es el 1. La propiedad fundamental de la división es: **divisor por cociente más residuo es igual al dividendo**, usando el ejemplo anterior $(7 \times 3) + 4 = 25$.

Un **número compuesto** es divisible entre otro diferente a sí mismo y de la unidad. Por ejemplo, el 24 es número compuesto porque es divisible entre 3, pues $24 = 3 \times 8$; pero no solamente el 3 lo divide sino los números 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24.

Los números que solamente son divisibles entre sí mismos y la unidad se le llama **números primos**, los números primos menores de 100 son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Ejemplo: a) Dividir $87 \div 6$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 6 \overline{) 87} \\ \underline{-6} \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 6 \times 1 = 6 \\ 8 - 6 = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 6 \overline{) 87} \\ \underline{-6} \\ 27 \\ \underline{-24} \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 6 \times 4 = 24 \\ 27 - 24 = 3 \end{array}$$

El cociente es 14 y sobra 3

Comprobación

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 6 \\ \hline 84 \\ + 30 \\ \hline 87 \end{array}$$

Observa que **siempre debe ser menor el residuo que el divisor**, en caso contrario, debe aumentar un número en el cociente.

b) Dividir $6843 \div 54$

Primero separamos dos cifras de izquierda a derecha del dividendo.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 54 \overline{) 6843} \\ \underline{-54} \\ 14 \end{array} \quad \begin{array}{l} 54 \times 1 = 54 \\ 68 - 54 = 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 54 \overline{) 6843} \\ \underline{-54} \\ 144 \\ \underline{-108} \\ 36 \end{array} \quad \begin{array}{l} 54 \times 2 = 108 \\ 144 - 108 = 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 126 \\ 54 \overline{) 6843} \\ \underline{-54} \\ 144 \\ \underline{-108} \\ 363 \\ \underline{-324} \\ 39 \end{array} \quad \begin{array}{l} 54 \times 6 = 324 \\ 363 - 324 = 39 \end{array}$$

Comprobación

$$\begin{array}{r} 126 \\ \times 54 \\ \hline 504 \\ 630 \\ \hline 6804 \\ + 39 \\ \hline 6843 \end{array}$$

c) Rogelio tiene que repartir en partes iguales el trabajo de la parcela de la comunidad entre 12 familias. Si el terreno tiene 63 408 metros cuadrados, ¿cuánto corresponde a cada familia?

Solamente se debe dividir $63\,408 \div 12$

$$\begin{array}{r} 5284 \\ 12 \overline{) 63408} \\ \underline{-60} \\ 34 \\ \underline{-24} \\ 100 \\ \underline{-96} \\ 48 \\ \underline{-48} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5284 \\ \times 12 \\ \hline 10568 \\ 5284 \\ \hline 63408 \end{array}$$

Es una división exacta.

A cada familia le corresponde **5 284** metros cuadrados de la parcela.

Unidades para medir tiempo, longitud y superficie

Las unidades que utilizamos para medir el **tiempo** son **las horas, los minutos y los segundos**.

Es posible convertir cada una de estas unidades de tiempo en cualquiera otra de ellas, dividiendo o multiplicando por 60, según sea el caso.

Para convertir las horas a minutos o los minutos a segundos, se multiplica por 60.

Por ejemplo, convertir 15 horas a minutos y a segundos.

$$15 \times 60 = 900 \text{ minutos}$$

$$900 \times 60 = 54\,000 \text{ segundos}$$

$$15 \text{ horas} = 900 \text{ minutos} = 54\,000 \text{ segundos}$$

Para convertir los minutos a horas o los segundos a minutos, se divide entre 60.

Por ejemplo, convertir 28 000 segundos a minutos.

$$\begin{array}{r} 466 \leftarrow \text{minutos} \\ 60 \overline{) 28000} \\ \underline{400} \\ 400 \\ \underline{400} \\ 0 \end{array}$$

466 minutos 40 segundos

Ahora, convertir 840 minutos a horas.

$$\begin{array}{r} 14 \leftarrow \text{horas} \\ 60 \overline{) 840} \\ \underline{240} \\ 240 \\ \underline{240} \\ 0 \end{array}$$

14 horas 7 minutos

24 horas completan un día.
60 minutos completan una hora.
60 segundos completan un minuto.

La longitud se define como la distancia entre dos puntos, en México se utiliza el sistema métrico decimal para medir la longitud, el **metro (m)** es la **unidad básica de medida** de la longitud en este sistema métrico decimal.

Las medidas pueden ser submúltiplos (menores que el metro) y múltiplos (mayores que el metro).

Submúltiplos	Unidad básica	Múltiplos
Decímetro (dm)		Decámetro (dam)
Centímetro (cm)	Metro (m)	Hectómetro (hm)
Milímetro (mm)		Kilómetro (km)

Equivalencias:

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm}$$

$$1 \text{ km} = 10 \text{ hm} = 100 \text{ dam} = 1000 \text{ m}$$

Para convertir de mayor a menor unidad, se hace una multiplicación; en caso contrario, de menor a mayor se efectúa una división.

Tabla de equivalencias		
Unidad	Abreviaturas	Equivalencias
Kilómetro	km	1000 m
Hectómetro	hm	100 m
Decámetro	dam	10 m
Metro	m	1 m
Decímetro	dm	0.1 m
Centímetro	cm	0.01 m
Milímetro	mm	0.001 m

Ejemplos: a) ¿Cuántos metros equivalen 8 kilómetros?

Para transformar los kilómetros a metros, se multiplica por 1000.

$$8 \text{ km} = 8 \times 1000 = 8000 \text{ m}$$

b) ¿Cuántos metros equivalen 900 centímetros?

Para convertir los centímetros a metros, se divide entre 100 o se multiplica por 0.01.

$$900 \text{ cm} = 900 \times 0.01 = 9 \text{ m}$$

Una **superficie** es el área ocupada por una figura u objeto. Las

unidades más utilizadas del sistema métrico decimal para medir superficies son los **centímetros cuadrados** (cm^2), los **metros cuadrados** (m^2), la **hectárea** (ha) y los **kilómetros cuadrados** (km^2).

Una superficie de un centímetro cuadrado equivale a un cuadrado que mide un centímetro por lado, de igual manera, un metro cuadrado equivale a un cuadrado que mide un metro por lado, una hectárea equivale a un cuadrado que mide 100 metros por lado, es decir, es igual a 10 000 metros cuadrados; y un kilómetro cuadrado equivale a un cuadrado que mide un kilómetro por lado.

Para convertir las hectáreas a metros cuadrados se multiplica por 10 000.

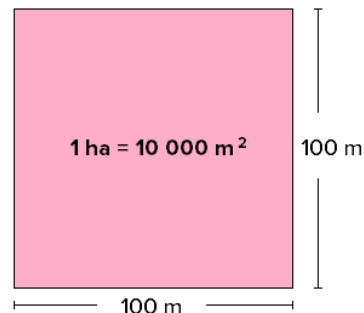
Por ejemplo, ¿cuántos metros cuadrados equivalen 24 hectáreas? **R.** $24 \text{ ha} = 24 \times 10\,000 = 240\,000 \text{ m}^2$.

Para transformar los metros cuadrados a hectáreas se divide entre 10 000. Por ejemplo, ¿cuántas hectáreas equivalen 35 000 metros cuadrados? **R.** $35\,000 \text{ m}^2 = 35\,000 : 10\,000 = 3.5 \text{ ha}$.

Resolvamos los siguientes problemas.

1. Georgina y Jorge preparan un guisado. La receta dice que necesitan cocinarla por 45 minutos, pero su temporizador digital de cocina solamente marca segundos. ¿Cuántos segundos tienen que programarlo para cubrir el tiempo que se les pide en la receta?

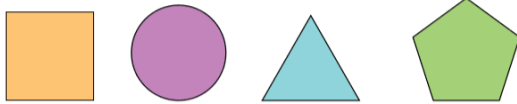
$$45 \text{ min} = 45 \times 60 = 2\,700 \text{ segundos}$$





2. La familia de Manuel sembró 750 000 metros cuadrados de terreno con árboles frutales para su huerto. ¿Cuántas hectáreas sembró la familia de Manuel?
 $750\,000\text{ m}^2 = 750\,000 \div 10\,000 = 75\text{ ha.}$

Figuras geométricas



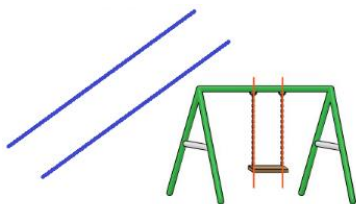
La **geometría** es la parte de las matemáticas que estudia las propiedades de las figuras, la forma de medirlas y sus relaciones con el espacio. El cuadrado, el círculo, el triángulo y el pentágono son ejemplos de figuras geométricas.

Las figuras geométricas están compuestas de **lados** (líneas rectas que forman una figura) y de **ángulos** (abertura que se forman entre dos lados de un polígono) que pueden ser internos y externo.

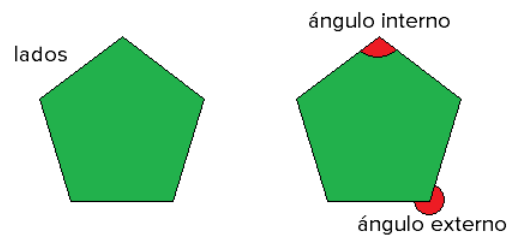
Las figuras que tienen todos sus lados iguales reciben el nombre de **regulares**, además las figuras geométricas (polígonos) se clasifican de acuerdo con el número de sus lados.

Lados	Nombre	Regular	Irregular
3	Triángulo	 Equilátero	 Isósceles  Escaleno
4	Cuadrilátero	 Cuadrado	 Rectángulo  Rombo  Irregular
5	Pentágono	 Pentágono	 Irregular
6	Hexágono	 Hexágono	 Irregular

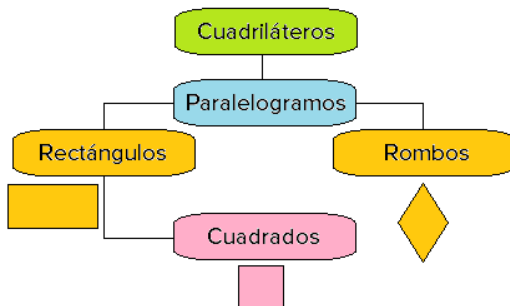
Un **polígono regular** es el que presenta sus lados y sus ángulos internos iguales.



Las **líneas paralelas** son aquellas que mantienen la misma distancia y nunca llegan a cruzarse.



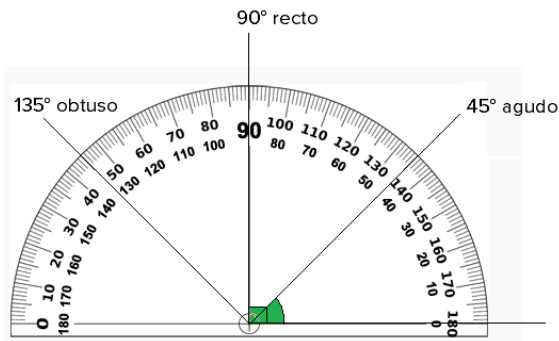
El **paralelogramo** es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son segmentos de líneas paralelas.



Los paralelogramos pueden ser rectángulos o rombos. Dentro de los rectángulos se encuentra el cuadrado.

Paralelogramos		
Cuadrado	Lados iguales	Ángulos iguales
Rectángulo	Lados opuestos iguales	Ángulos iguales
Rombo	Lados iguales	Ángulos opuestos iguales

Triángulos y otros polígonos



Los ángulos pueden medirse, las unidades de medida de los ángulos son los grados sexagesimales, comúnmente llamados **grados**, los cuales se representan con el símbolo $^{\circ}$. El transportador es el instrumento que se utiliza para medir los ángulos.

Los ángulos se clasifican según su medida, por ejemplo, se le llama ángulo **agudo** si mide menos de 90° , ángulo **recto** si mide 90° y ángulo **obtuso** si mide más de 90° .

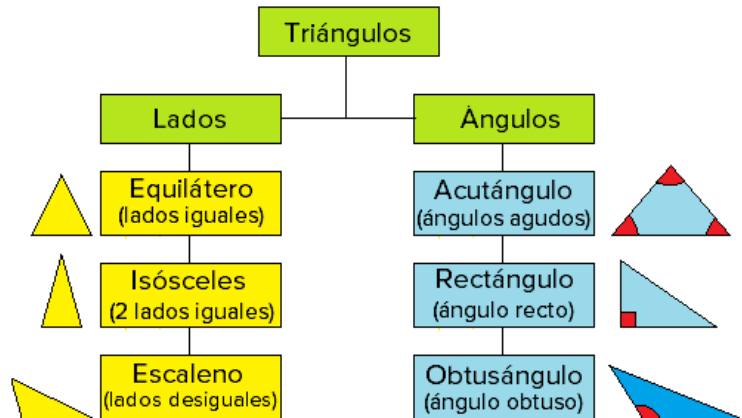
Las líneas que forman un ángulo recto son **perpendiculares** entre sí.

Por otro lado, a los triángulos se clasifican de acuerdo con la medida de sus lados y a la medida de sus ángulos.

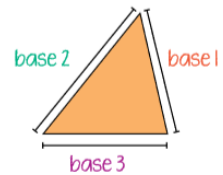
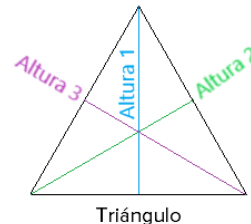
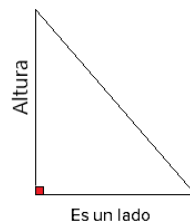
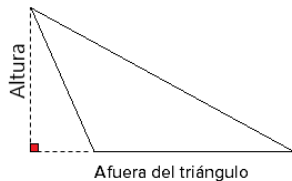
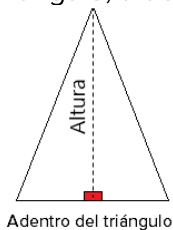
El **perímetro** es la suma de sus lados.

El **área** es la extensión de la superficie.

En un triángulo se le llama **altura** a la recta que une un vértice con el lado opuesto formando un ángulo de 90° .



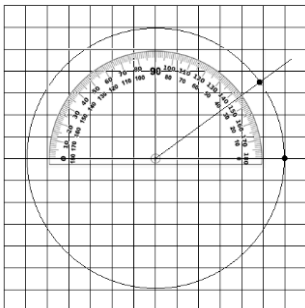
Un triángulo tiene tres bases (lados) y tres alturas, pueden estar adentro del triángulo, afuera, o ser uno de los lados.



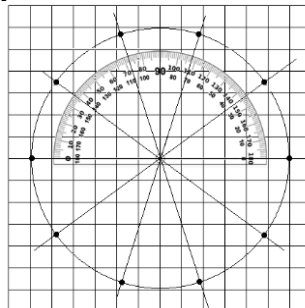
Para poder dibujar un polígono regular debemos tener a la mano una regla, un objeto redondo o un compás, un transportador, un lápiz y una hoja cuadriculada.

¿Cómo dibujamos un decágono regular dentro de una circunferencia?

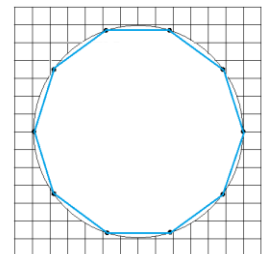
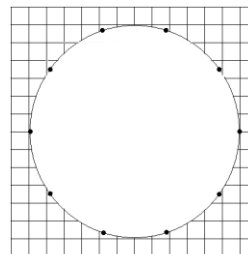
1. Tracemos una circunferencia con el compás y dividamos los 360° entre 10 (número de lados de un decágono), $360^{\circ} \div 10 = 36^{\circ}$.



2. Con el transportador medimos los 36° y con la regla dibujamos el ángulo. Calculamos los demás ángulos sumando 36 en 36 y los marcamos.

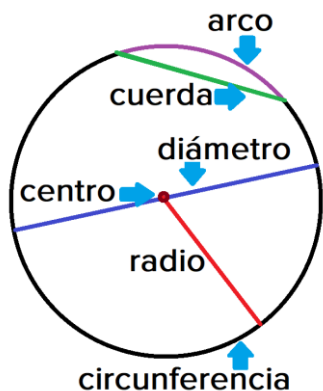


3. Unamos los puntos para formar el decágono.



El círculo

Una **circunferencia** se forma con todos los puntos que están a la misma distancia de un punto llamado centro. Un **círculo** es la superficie que se forma al interior de una circunferencia. La longitud de una circunferencia es el perímetro, se mide en centímetros y metros, así como el área en centímetros cuadrados y metros cuadrados.



Las partes más importantes de un círculo son:

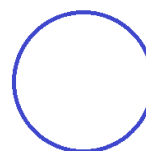
Centro: punto en el cual están a la misma distancia todos los puntos de la circunferencia.

Radio: segmento que conecta el centro con cualquier punto de la circunferencia.

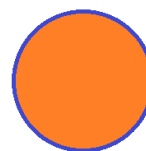
Diámetro: segmento que conecta dos puntos de la circunferencia, pasando por el centro.

Arco: fragmento de la circunferencia entre dos puntos.

Cuerda: segmento rectilíneo que conecta los dos puntos del arco.



circunferencia



círculo



El instrumento que se utiliza para trazar cualquier círculo es el **compás**.

En matemáticas, una constante es un valor numérico que, pese a las circunstancias, no cambia. Tal es el caso del número Pi, el cual se simboliza con la letra griega π y equivale a 3.14159265...

El número Pi indica el número de veces que cabe el diámetro de una circunferencia sobre su perímetro, resulta ser la misma en todos los círculos, independientemente del tamaño que tengan; por eso se dice que es una constante.

$$\pi = \frac{\text{perímetro del círculo}}{\text{diámetro del círculo}} = 3.14159265359 \dots$$

Se usa siempre una aproximación la cual es $\pi = 3.1416$

Fuentes confiables de información

Los **datos estadísticos** son aquellos que proporcionan información sobre temas específicos, que puede ser comparada, analizada e interpretada. Estos datos se obtienen mediante encuestas o censos.

Las **encuestas** son preguntas que se hacen a una parte de la población, en cambio, los **censos** son el recuento de datos estadísticos de toda la población.

La principal fuente de información en México es el **Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI)**. En la vida diaria, las personas buscan información por interés, por alguna necesidad específica o para realizar alguna actividad. Para que esta información sea de utilidad, es necesario buscar fuentes con datos confiables, que ayuden a la toma de decisiones y a elegir la mejor opción. Otras fuentes confiables son SEDECO, CONEVAL, CONACYT, PROFECO, INSABI, SEP, INEA, PROFECO y SRE, entre otros.

Para elegir la información de utilidad de acuerdo con lo que se necesita, interesa o se va a realizar es necesario que se tenga:

- **Conocimiento.** Es la capacidad de reconocer la necesidad o problemática que se quiere atender, para la que necesitamos investigar la información y los datos.
- **Clarificación.** Esta capacidad requiere analizar la información para encontrar la que atienda mejor la necesidad o interés que tengo, es decir, la más importante.
- **Indagación.** Averiguar o preguntar en diferentes medios la información y datos confiables.
- **Análisis.** Revisar si la información y los datos que se han obtenido sirven para comparar la información entre diferentes fuentes.

- **Selección.** Es la capacidad de elegir lo que es útil y de eliminar lo que no, después de conocer, clarificar, indagar y analizar la información.
- **Cooperación.** Si buscas información con otras personas puedes enriquecer los puntos de vista para elegir y tomar mejores decisiones sobre la problemática o situación que te interesa o que es útil para la comunidad.

Recolección y registro de datos estadísticos

El **dato estadístico** representa la cantidad o frecuencia de la información que se mide. Es decir, si se quiere saber cuántas personas viven en un lugar, el dato estadístico es el número total de personas que viven ahí, que se obtuvo con alguno de los instrumentos o herramientas para conocerlo, como los censos o las encuestas. Los datos estadísticos suelen ser **variables**, es decir, pueden cambiar por diferentes circunstancias o fenómenos, pueden ser discretas o continuas.

Las **variables discretas** son aquellas que no pueden tomar ningún valor entre dos números enteros, por ejemplo, la población que vive en un lugar.

Las **variables continuas** pueden tomar un valor entre dos números enteros, por ejemplo, la medida de la temperatura y la estatura de las personas.

En la recolección de datos existen dos grandes fuentes: las **fuentes primarias** (directas), por ejemplo, los censos de población del INEGI y las **fuentes secundarias** (indirectas), por ejemplo, CONEVAL presenta datos sobre la pobreza en México a partir de los datos del INEGI. Los datos se clasifican para facilitar su uso y comprensión.

El **registro de los datos** puede realizarse en una tabla o en programas informáticos para ordenarlos y cuantificarlos. Se pueden utilizar tablas donde existen las **filas** (líneas horizontales) y las **columnas** (líneas verticales). Las **celdas** son los espacios que se forman en donde se cruzan una fila y una columna.

Población que habla lengua indígena y total de población en los estados indicados		
Estado	Población total	Población que habla lengua indígena
Campeche	878528	91801
Chiapas	5181929	1459648
Guerrero	3328762	515487
Hidalgo	2944897	362629
Oaxaca	3917300	1221555
Yucatán	2215931	525092

Organización de datos

La **población** es el número total de personas, objetos, cosas, situaciones o elementos que se consideran para conocer sus características y presentar los datos estadísticas; estos pueden ser de manera **ascendente** (de menor a mayor), por ejemplo, las edades de la población, o **descendente** (de mayor a menor), por ejemplo, características de los estados.

El **pictograma** es un dibujo que es capaz de dar un mensaje, representar un concepto o una cantidad por sí solo, sin necesidad de acompañarlo con un texto explicativo.

Los **pictogramas** se utilizan para representar todos los datos de una encuesta, si la cantidad es muy grande, se utilizan símbolos para agrupar las **centenas**, otro para las **decenas** y otro para las **unidades**. También podemos usar diferentes tamaños y colores.

Deporte	Hombres	Mujeres
Futbol		
Volibol		
Atletismo		

Análisis de datos estadísticos

El análisis de datos estadísticos puede ser cualitativo, cuantitativo o ambos.

El análisis **cualitativo** (*cuali* refiere a cualidad) busca conocer el cómo y el porqué de un fenómeno.

Un análisis cuantitativo en la vida diaria consiste en comparar productos, servicios, o cualquier aspecto o situación, para decidir cuáles elegir durante las actividades diarias.

Si el análisis está basado únicamente en datos numéricos que se pueden contar y registrar, se dice que es **cuantitativo** (*cuanti* refiere a cantidad).
La siguiente tabla muestra varios ejemplos.

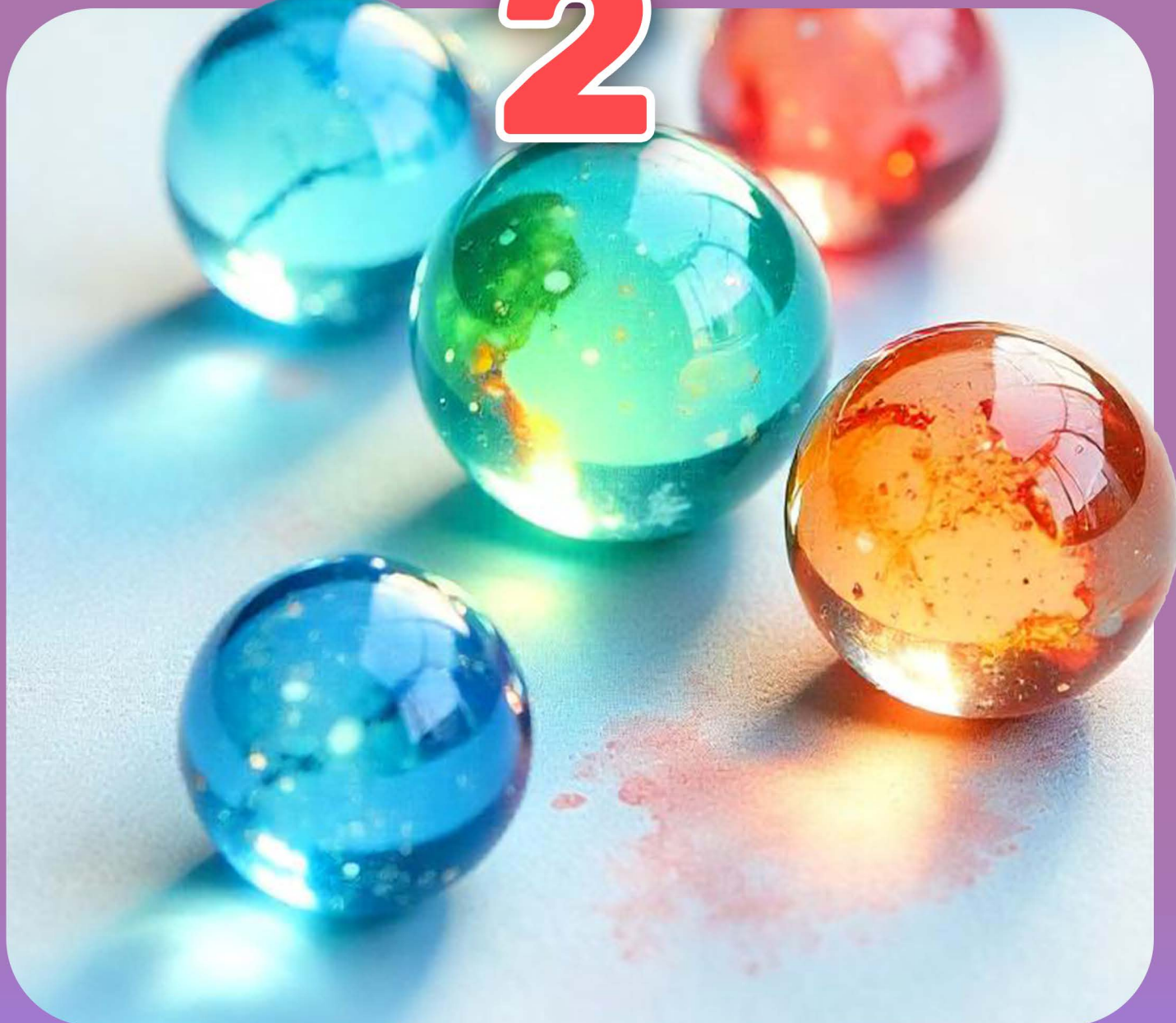
Datos estadísticos		
Situación	Datos cualitativos	Datos cuantitativos
Violencia de la pareja hacia las mujeres	El daño emocional de las mujeres afecta su autoestima.	44 mujeres por cada 100 han experimentado violencia de su pareja.
Productos de la canasta básica	Los productos que se venden son frescos.	Un producto cuesta \$15.00 en un lugar y en otro \$20.00

Ninguno de los análisis es mejor que el otro, ya que ambos suelen aportar información para la toma de decisiones.

Los **pictogramas** se pueden utilizar para representar datos cuantitativos, pero también para datos cualitativos.

PENSAMIENTO MATEMÁTICO

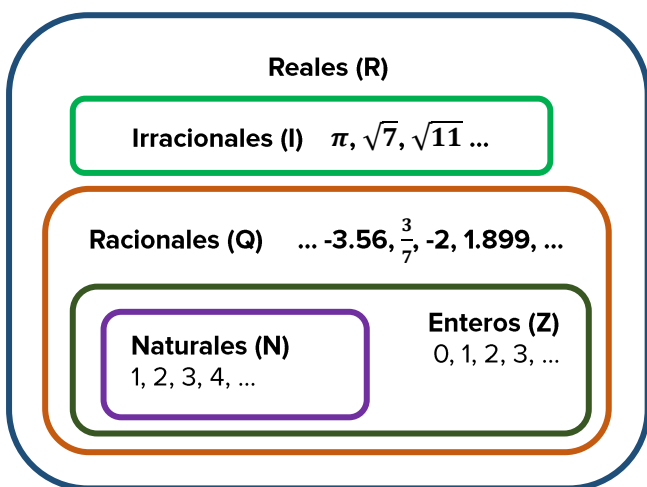
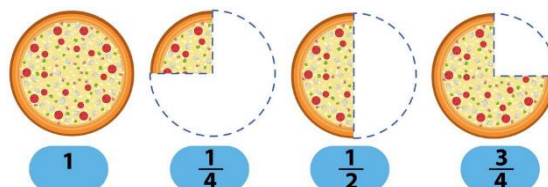
2



Guía de Pensamiento matemático 2

Los números racionales y sus propiedades

Los **números naturales** fueron los primeros en ser creados y se utilizan para contar objetos enteros, sin embargo, en ocasiones se necesita realizar recuentos y operaciones que incluyan tanto objetos enteros como parte de estos, por ejemplo, calcular el peso de un kilo y medio de frijoles más tres cuartos de crema. En situaciones como estas se utilizan los **números racionales**, que permiten contar tanto unidades completas como porciones de un todo. Los **números racionales** o fraccionarios se simbolizan con la letra Q, estos se utilizan en diversos contextos de la vida diaria, como medir el tiempo (medio día, un cuarto de hora), comparar opciones de productos según su precio (medio kilo o tres cuartos de café), o evaluar el progreso en una tarea (si falta medio o un tercio de techo por pintar), entre otros ejemplos.



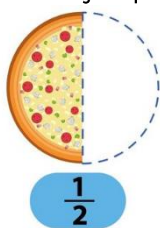
El conjunto de los números racionales incluye a los números naturales, es decir, todos los números naturales también son números racionales, en el esquema de la clasificación de los números se puede observar.

Los **números enteros** son los que no están fraccionados, por eso contienen a los números naturales.

Los números racionales pueden escribirse como la división o el cociente de dos números enteros, lo que se indica con la línea horizontal entre ambas cantidades.

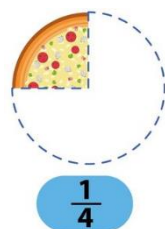
Una fracción representa cuántas partes iguales de un entero se están tomando.

Por ejemplo, este entero está dividido en:



-dos medios, la fracción $\frac{1}{2}$, indica que se toma una de las dos partes iguales en que se ha dividido.

-cuatro cuartos, la fracción $\frac{1}{4}$, indica que se toman una parte de cuatro iguales en que se ha dividido un entero.



Los números racionales se pueden representar como números decimales (aquellos que tienen punto decimal), el resultado de una división inexacta, por ejemplo, $\frac{6}{30}$, se representa como $6 \div 30 = 0.2$

Por lo tanto, 0.2 también es un **número racional escrito con decimales**.

Todos los números naturales son también números racionales, estos pueden escribirse como división, ejemplos: $5 = \frac{5}{1}$, $12 = \frac{12}{1}$, $0 = \frac{0}{1}$.

$\frac{16}{0}$ La división entre cero NO puede hacerse, la calculadora marcará ERROR.



$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{8}{16}$$

$$0.5 = 0.5 = 0.5$$

Distintos números fraccionarios pueden expresar el mismo número, entonces se dice que son **fracciones equivalentes**, por ejemplo, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{8}{16}$.

En la vida diaria se aplica, por ejemplo, pelar la mitad ($\frac{1}{2}$) de las papas de un costal es igual a pelar dos cuartas partes ($\frac{2}{4}$) del mismo, porque ambas fracciones tienen como resultado 0.5

Ejemplos: Escribe en forma de fracción.

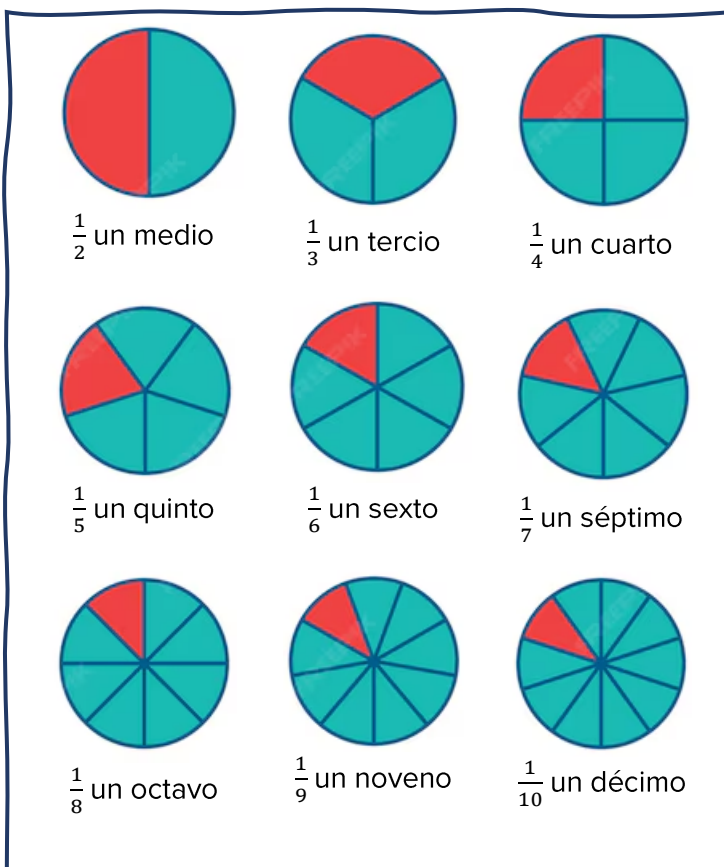
1. Lupe tomó 2 partes de 5 iguales en que se dividió un pastel. **R.** La fracción es $\frac{2}{5}$.
2. Beto separó 3 de 4 partes iguales en que se dividió una cartulina. **R.** La fracción es $\frac{3}{4}$.

Las partes de una fracción se nombran numerador y denominador, el **denominador** indica el número de partes en que se ha dividido el todo o la unidad principal; y el **numerador**, indica el número de partes que se toman del todo.



$\frac{3}{8}$ $\rightarrow$ Numerador
 $\frac{3}{8}$ $\rightarrow$ Denominador

Cuando se lee un número racional expresado como fracción, el numerador se menciona tal cual, mientras que el denominador se dice de la siguiente forma:



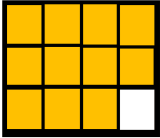
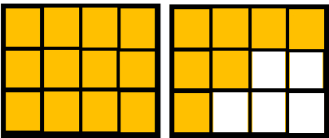
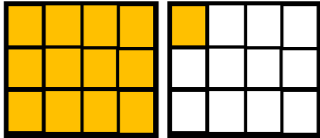
Para los denominadores mayores a 10, se agrega la terminación "-avos" al nombre del número, así que para el 11 se dice onceavos; para el 12, doceavos; para el 13, treceavos; para el 14, catorceavos, y así sucesivamente.

Ejemplos:

- a) $\frac{3}{4}$ se lee tres cuartos.
- b) $\frac{2}{5}$ se lee dos quintos.
- c) $\frac{4}{6}$ se lee cuatro sextos.
- d) $\frac{5}{8}$ se lee cinco octavos.
- e) $\frac{7}{9}$ se lee siete novenos.
- f) $\frac{8}{12}$ se lee ocho doceavos.
- g) $\frac{11}{20}$ se lee once veinteavos.
- h) $\frac{15}{30}$ se lee quince treintavos.

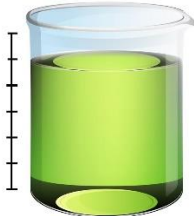
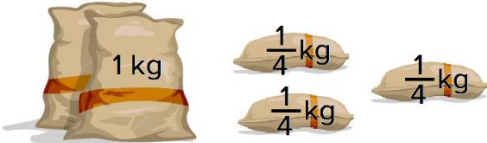
Las fracciones pueden ser propias, impropias y mixtas, dependiendo del valor de sus componentes.

Fracciones propias	Fracciones impropias	Fracciones mixtas
$\frac{11}{12}$	$\frac{19}{12}$	$1\frac{1}{12}$

Once doceavos	Diecinueve doceavos	Un entero un doceavo
El numerador es menor que su denominador.	El numerador siempre es mayor al denominador.	Tienen una parte entera y otra fraccionaria.
		
El resultado de la división entre numerador y denominador siempre es menor de 1.	Si se hace la división entre numerador y denominador, el resultado es mayor a 1.	Su valor también es mayor a 1.
$\frac{11}{12} < 1$	$\frac{19}{12} > 1$	$1\frac{1}{12} > 1$

Ejemplos;

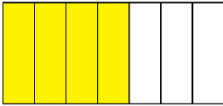
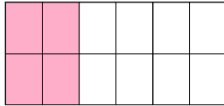
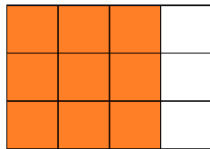
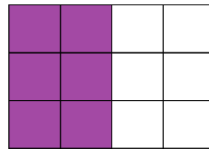
Observa cada imagen, escribe qué fracción representan y su tipo.

			
La fracción es $\frac{4}{6}$ (cuatro sextos), esta es propia.	La fracción es $\frac{9}{10}$ (nueve décimos), esta es propia.	La fracción es $\frac{5}{6}$ (cinco sextos), esta es propia.	La fracción impropia es $\frac{11}{4}$ (once cuartos), que en forma mixta es $2\frac{3}{4}$ (dos enteros tres cuartos).

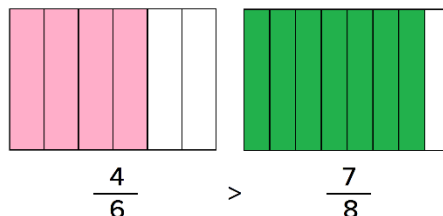
Las fracciones se pueden comparar, es decir, definir cuál es mayor o si son iguales. Hay varias formas:

1. Dibujarlas y comparar los dibujos.

Los enteros dibujados deben de tener las mismas dimensiones.

a) Si las fracciones tienen el mismo numerador es mayor la fracción que tiene el menor denominador.  >  $\frac{8}{7}$ $\frac{8}{12}$	b) En fracciones con igual denominador es mayor la que tiene el numerador mayor.  >  $\frac{27}{12}$ $\frac{18}{12}$
--	---

c) Tanto el numerador y denominador son diferentes.

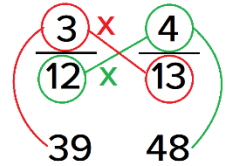


Esta situación tal vez pueda prestarse a confusiones si en el dibujo no se pudiera ver claramente la diferencia, por ello es más efectivo el siguiente método.

2. Usar la técnica de productos cruzados.

En este caso se multiplica el numerador de una fracción por el denominador de la otra y comparar los resultados, entonces se tienen dos fracciones que se multiplican en diagonal o de forma cruzada.

Por ejemplo, para comparar las fracciones $\frac{3}{12}$ y $\frac{4}{13}$ se multiplica 3 x 13 y se coloca el resultado (39) debajo de la fracción $\frac{3}{12}$, también se multiplica 4 x 12 y se coloca el resultado (48) debajo de la fracción $\frac{4}{13}$. Se comparan estos resultados, 39 es menor que 48, entonces $\frac{3}{12} < \frac{4}{13}$.



Ejemplos: Compara las fracciones siguientes y escribe el signo menor que (<), mayor que (>) o igual a (=), según corresponda.

a) $\frac{8}{9}$ y $\frac{34}{35}$ Usando la técnica de productos cruzados se tiene que $8 \times 35 = 280$ y $9 \times 34 = 306$, entonces $\frac{8}{9} < \frac{34}{35}$.	b) $\frac{8}{12}$ y $\frac{4}{12}$ Al multiplicar en diagonal se tiene que $8 \times 12 = 96$ y $4 \times 12 = 48$, entonces $\frac{8}{12} > \frac{4}{12}$.	c) $\frac{3}{15}$ y $\frac{3}{13}$ Usando los productos cruzados se tiene que $3 \times 13 = 39$ y $3 \times 15 = 45$, entonces $\frac{3}{15} < \frac{3}{13}$.
d) Juan está sembrando maíz y frijol en $\frac{3}{4}$ partes de un campo que está dividido en tercios. Si ya sembró $\frac{2}{3}$, ¿le falta por sembrar o ya terminó? Es necesario saber cuál de las fracciones es mayor $\frac{3}{4}$ o $\frac{2}{3}$, usando la técnica de productos cruzados se tiene que $3 \times 3 = 9$ y $4 \times 2 = 8$, entonces $\frac{3}{4}$ es mayor que $\frac{2}{3}$, así que todavía le falta por sembrar.		

También existen las **fracciones decimales**, estas tienen por denominador una potencia de 10, es decir, 10, 100, 1 000, 10 000, entre otras. Por ejemplo: $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{15}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$.

Recuerda que una fracción también indica la división de un número (numerador) entre otro (denominador), las fracciones decimales se usan también para escribir las medidas del sistema métrico decimal:

1 metro está formado por 10 decímetros.

Un decímetro es una parte de las 10 que componen al metro. Así que, un decímetro es igual a un décimo de metro, esto se expresa como $\frac{1}{10}$.

1 metro está formado por 100 centímetros.

Un centímetro es una parte de las 100 que componen a un metro. Esto es un centímetro es igual a un centésimo de metro: $\frac{1}{100}$.

1 metro está formado por 1000 milímetros.

Un milímetro es una parte de las 1000 que componen a un metro. De modo que un milímetro es igual a un milésimo de metro: $\frac{1}{1000}$.

Recuerda que un decímetro es mayor que un centímetro y un centímetro es mayor que un milímetro, esto se puede observar ya que: $\frac{1}{10} > \frac{1}{100} > \frac{1}{1000}$.

Ejemplo: Observa las siguientes fracciones y ordénalas de menor a mayor: $\frac{1}{100}$, $\frac{4}{1000}$, $\frac{4}{10000}$, $\frac{4}{100}$.

Primero se observa que de $\frac{1}{100}$ y $\frac{4}{100}$ la fracción menor es $\frac{1}{100}$ pues tienen el mismo denominador y $1 < 4$, de $\frac{4}{1000}$ y $\frac{4}{10000}$ al tener el mismo numerador, la menor es la que tenga el denominador más grande, así que $\frac{4}{10000} < \frac{4}{1000}$. Solamente falta comparar a $\frac{1}{100}$ y a $\frac{4}{1000}$ usando el producto cruzado se tiene que $1 \times 1000 = 1000$ y $4 \times 100 = 400$, así que $\frac{4}{1000} < \frac{1}{100}$; finalmente se tiene que $\frac{4}{10000} < \frac{4}{1000} < \frac{1}{100} < \frac{4}{100}$.



Se ha revisado a los números racionales como su forma de numerador y denominador, pero se pueden expresar realizando la división, que puede entenderse como el resultado o cociente de numerador entre denominador, pero no todas las divisiones dan como resultado un número entero; la mayoría de ellas son inexactas, es decir, tienen como resultado un **número decimal**, estos se usan al contar dinero con pesos y centavos, al medir longitudes en metros o centímetros, al calcular la estatura de una persona, al cocinar entre otras cosas.

Los **números decimales** son aquellos que tienen una parte entera y una parte decimal, separadas por un punto. En la parte decimal de un número, el cero sí tiene valor cuando se localiza a la izquierda, entre el punto decimal y un número diferente de cero, como en 32.057, por ejemplo. Esto se debe a que las posiciones de los números a la derecha del punto decimal tienen un valor definido y reciben su nombre de acuerdo con su posición.

Para leer los números decimales se dicen los enteros seguidos de la parte decimal y el nombre de la posición ocupada más alejada hacia la derecha:



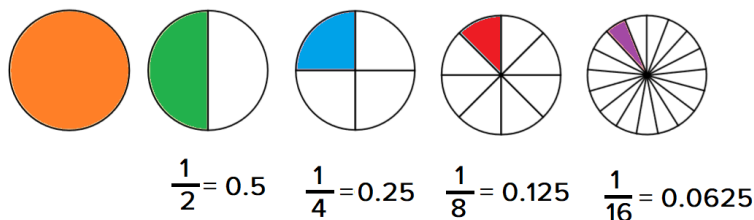
Número	Centena	Decenas	Unidades	Punto	Décimos	Centésimos	Milésimos	Diezmilésimos	Lectura
3.23			3	.	2	3			Tres enteros, veintitrés centésimos.
56.002		5	6	.	0	0	2		Cincuenta y seis enteros, 2 milésimos.
100.0253	1	0	0	.	0	2	5	3	Cien enteros, doscientos cincuenta y tres diezmilésimos.
12.8		1	2	.	8				Doce enteros, ocho décimos.

El número cociente o resultado de una división de un número racional es

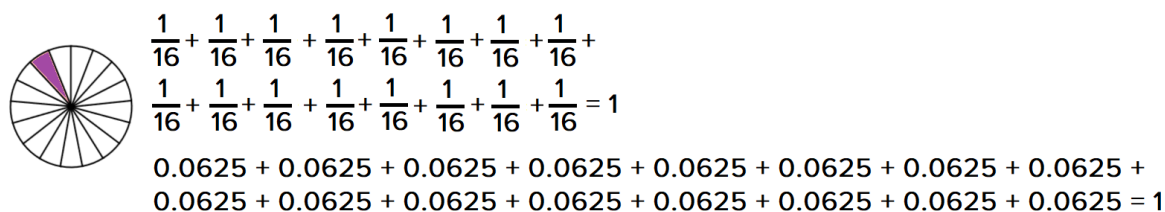
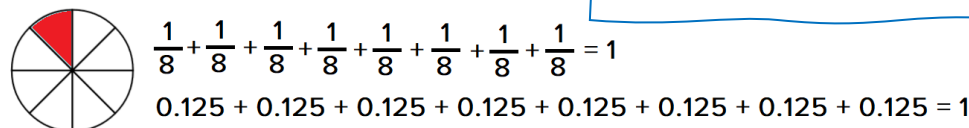
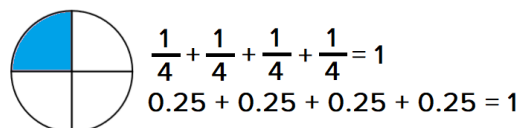
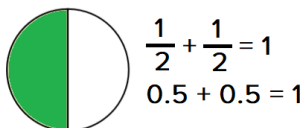
Entero	Decimal exacto	Decimal periódico puro	Decimal periódico mixto
Se obtiene un entero exacto. Por ejemplo: $\frac{6}{2} = 3$	El resultado es un número no periódico. Por ejemplo: $\frac{4}{10} = 0.8$	Después del punto decimal tiene una serie o periodo de números que se repiten hasta el infinito. Por ejemplo: $\frac{1}{3} = 0.333\bar{3}$	Después del punto decimal consta de una parte no periódica seguida de una serie o periodo de números que se repiten hasta el infinito. Por ejemplo: $\frac{166}{300} = 0.553\bar{3}$, 55 es la parte no periódica y $3\bar{3}$ es la serie periódica.

Pero no todos los números decimales pueden escribirse como la división exacta o periódica de dos enteros, a ellos se les llama **números irracionales**, por ejemplo, número pi, π , es un ejemplo de un número irracional.

Observa algunas equivalencias de fracciones y decimales:



De aquí que:



Si se suman 2 medios el resultado es un entero.
 Al sumar 4 cuartos la suma es un entero.
 De igual forma 8 octavos dan un entero.
 Si se suman 16 dieciseisavos el resultado es un entero.
 Un entero está compuesto por dos medios ($\frac{2}{2}$).
 Un medio está formado por dos cuartos ($\frac{2}{4}$).
 Un cuarto se hace con dos octavos ($\frac{2}{8}$).
 Un octavo se compone de dos dieciseisavos ($\frac{2}{16}$), y así sucesivamente.

Para obtener las fracciones equivalentes, se multiplica o divide el numerador y el denominador por el mismo número. Por ejemplo:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6} \quad \frac{2}{6} = \frac{2 \times 2}{6 \times 2} = \frac{4}{12} \quad \frac{4}{12} = \frac{4 \times 2}{12 \times 2} = \frac{8}{24}$$

Las fracciones son equivalentes a $0.\bar{3}$, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{8}{24} = 0.\bar{3}$

Además, si se desea comparar una fracción con un número decimal, primero se pasa la fracción a número decimal y después se hace la comparación, por ejemplo, para saber si $\frac{8}{5}$ es mayor que 1.5, primero se pasa $\frac{8}{5}$ a decimal, $8 \div 5 = 1.6$, como $1.6 > 1.5$, entonces $\frac{8}{5} > 1.5$

Ejemplos: Califica como verdadero o falso las siguientes aseveraciones.

a) $\frac{1}{2}$ equivale a $\frac{5}{10}$.

R. Esto es verdadero ya que $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10}$

b) $\frac{2}{5}$ es igual a 0.5.

R. Esto es falso pues $2 \div 5 = 0.4$

c) $\frac{2}{4}$ es mayor que $\frac{4}{2}$

R. Esto es falso, usando los productos cruzados se tiene que $2 \times 2 = 4$ y $4 \times 4 = 16$, luego $\frac{4}{2} > \frac{2}{4}$.

Suma y resta con fracciones y decimales positivos

Al **sumar** fracciones con el mismo denominador:



se suman los numeradores y se escribe el mismo denominador.

Ejemplos

$$\frac{4}{9} + \frac{3}{9} = \frac{4+3}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{8}{12} + \frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{8+1+5}{12} = \frac{14}{12}$$

Al **restar** fracciones con el mismo denominador:



se restan los numeradores y se escribe el mismo denominador.

Ejemplo

Minuendo Sustraendo

$$\frac{7}{9} - \frac{4}{9} = \frac{7-4}{9} = \frac{3}{9}$$

$$\frac{7}{9} > \frac{4}{9}$$

Fracción minuendo

Fracción sustraendo

La **propiedad conmutativa** se da en la suma de fracciones, por eso no importa en qué orden se sume, el resultado siempre será el mismo, ejemplo:

$$\frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{9}{7} = \frac{3+4+9}{7} = \frac{16}{7}$$

$$\frac{9}{7} + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} = \frac{9+3+4}{7} = \frac{16}{7}$$

En la suma de fracciones también aplica la **propiedad asociativa**, ejemplo:

$$\left(\frac{2}{11} + \frac{3}{11}\right) + \frac{5}{11} = \frac{2}{11} + \left(\frac{3}{11} + \frac{5}{11}\right) = \left(\frac{2}{11} + \frac{5}{11}\right) + \frac{3}{11}$$

$$\left(\frac{2+3}{11}\right) + \frac{5}{11} = \frac{2}{11} + \left(\frac{3+5}{11}\right) = \left(\frac{2+5}{11}\right) + \frac{3}{11}$$

$$\frac{5}{11} + \frac{5}{11} = \frac{10}{11} \quad \frac{2}{11} + \frac{8}{11} = \frac{10}{11} \quad \frac{7}{11} + \frac{3}{11} = \frac{10}{11}$$

Al encontrar el resultado de una operación con fracciones es más fácil manejar este simplificado, **simplificar una fracción** significa encontrar una fracción equivalente, pero siendo el numerador y el denominador números más pequeños, por ejemplo, en la fracción $\frac{16}{32}$ se tiene que equivale a 0.5, una fracción equivalente a 0.5 es $\frac{1}{2}$, así que $\frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

Para simplificar fracciones es necesario identificar si el numerador y el denominador son divisibles de forma exacta entre un mismo número, generalmente empezamos con el 2, luego con el 3, y así sucesivamente. Por ejemplo, al simplificar $\frac{100}{200}$, se observa que 100 y 200 son pares, entonces $\frac{100}{200} = \frac{100 \div 2}{200 \div 2} = \frac{50}{100}$; de igual forma 50 y 100 siguen siendo pares, entonces $\frac{50}{100} = \frac{50 \div 2}{100 \div 2} = \frac{25}{50}$; 50 es par pero 25 no, lo que si es que ambos son divisibles entre 5, luego $\frac{25}{50} = \frac{25 \div 5}{50 \div 5} = \frac{5}{10}$; de igual forma 5 y 10 son divisibles entre 5, $\frac{5}{10} = \frac{5 \div 5}{10 \div 5} = \frac{1}{2}$, ya no se puede simplificar, así que $\frac{100}{200} = \frac{1}{2}$.

Ejemplo: Resuelve las siguientes operaciones. Simplifica cuando sea posible.

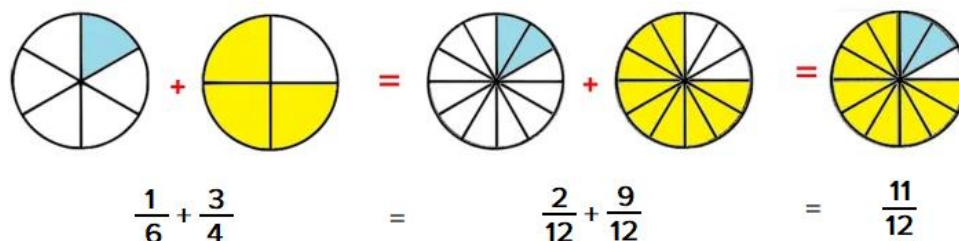
a) $\frac{6}{10} + \frac{2}{10}$

R. $\frac{6}{10} + \frac{2}{10} = \frac{6+2}{10} = \frac{8}{10} = \frac{8 \div 2}{10 \div 2} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{30}{45} - \frac{27}{45}$

R. $\frac{30}{45} - \frac{27}{45} = \frac{30-27}{45} = \frac{3}{45} = \frac{3 \div 3}{45 \div 3} = \frac{1}{15}$

Para resolver operaciones de suma y resta de fracciones con distinto denominador, es necesario encontrar fracciones equivalentes a que tengan un mismo denominador. Por ejemplo:



Una forma rápida de encontrar el denominador de fracción equivalente es calcular el mínimo común múltiplo de sus denominadores (el mínimo común múltiplo se abrevia m.c.m.).

El **mínimo común múltiplo** de dos o más números naturales es el número más pequeño que es múltiplo de todos ellos, es decir que contiene un número exacto de veces de todos los números involucrados, en el caso de 6 y 4 el mínimo común múltiplo es 12.

Cálculo del mínimo común múltiplo

Ejemplo: calcular el m.c.m. de 15, 20 y 5.

Se escriben los números en un mismo renglón y se traza una línea recta vertical del lado derecho

15	20	5	
----	----	---	--

Después, se revisa si los denominadores son divisibles entre los números primos, comenzando por el menor, que es el 2. Si es el caso, se escribe el 2 del lado derecho de la línea vertical, en el mismo renglón donde están los números.

15	20	5		2
----	----	---	--	---

Luego se divide los números entre 2, y el resultado se coloca debajo de cada uno; en los que no es posible dividir de forma exacta se escribe el mismo número en el siguiente renglón.

15	20	5		2
15	10	5		

Si alguno de los números encontrados es divisible entre 2, se hace de nuevo el paso, si no, se examina con el siguiente número primo, el número 3. Luego con el número 5, etc., hasta que en el renglón aparezcan solamente unos.

15	20	5		2
15	10	5		2
15	5	5		3
5	5	5		5
1	1	1		

Finalmente se multiplican entre sí los factores primos que se encontraron.

m.c.m. = $2 \times 2 \times 3 \times 5$
= 60

Para realizar la operación $\frac{6}{15} + \frac{7}{20} + \frac{4}{5}$, se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores, m.c.m. $(15, 20, 5) = 60$, 60 es el denominador de las fracciones equivalentes a cada una de las presentadas en la operación. Entonces $\frac{6}{15} = \frac{24}{60}$, pues si a 15 se multiplica por 4 se obtiene 60, de esta forma el numerador 6 se multiplica por 4, el resultado es $6 \times 4 = 24$. Por otro lado, $\frac{7}{20} = \frac{21}{60}$, de igual forma $20 \times 3 = 60$, entonces se multiplica a 7 por 3, resultando 21. Y por último $\frac{4}{5} = \frac{48}{60}$, pues $5 \times 12 = 60$ y $4 \times 12 = 48$. De esta forma se tiene que:

$$\frac{6}{15} + \frac{7}{20} + \frac{4}{5} = \frac{24}{60} + \frac{21}{60} + \frac{48}{60} = \frac{24 + 21 + 48}{60} = \frac{93}{60} = 1 \frac{33}{60} = 1 \frac{11}{20}$$

En el caso de $\frac{6}{4} - \frac{7}{10}$, se calcula el m.c.m. de 4 y 10, el cual es 20. Entonces para encontrar la fracción equivalente a $\frac{6}{4}$ con denominador 20, se divide $20 \div 4 = 5$, luego el numerador será igual a $6 \times 5 = 30$, es decir $\frac{6}{4} = \frac{30}{20}$; para la fracción $\frac{7}{10}$ se divide entonces $20 \div 10 = 2$ y se multiplica $7 \times 2 = 14$, así que $\frac{7}{10} = \frac{14}{20}$. Entonces:

$$\frac{6}{4} - \frac{7}{10} = \frac{30}{20} - \frac{14}{20} = \frac{30 - 14}{20} = \frac{16}{20} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{cc|c} 4 & 10 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

$$\text{m.c.m.} = 2 \times 2 \times 5 = 20$$

Ejemplos:

a) $\frac{5}{6} + \frac{4}{9} =$ El m.c.m. de 6 y 9 es 18. Luego $\frac{5}{6} + \frac{4}{9} = \frac{15}{18} + \frac{8}{18} =$ $\frac{15+8}{18} = \frac{23}{18} = 1\frac{5}{18}.$	$\begin{array}{cc c} 6 & 9 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & \end{array}$ m.c.m.=$2 \times 3 \times 3=18$	b) $\frac{10}{11} - \frac{9}{15} =$ El m.c.m. de 11 y 15 es 165. Así que $\frac{10}{11} - \frac{9}{15} = \frac{150}{165} - \frac{99}{165} = \frac{150-99}{165} = \frac{51}{165}$	$\begin{array}{cc c} 11 & 15 & 3 \\ 11 & 5 & 5 \\ 11 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & \end{array}$ m.c.m.=$3 \times 5 \times 11=165$
c) $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} =$ El m.c.m. de 4, 8 y 16 es 16. De modo que $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} =$ $\frac{4+2+1}{16} = \frac{7}{16}$	$\begin{array}{ccc c} 4 & 8 & 16 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$ m.c.m.=$2 \times 2 \times 2 \times 2=16$	d) $\frac{4}{3} + \frac{2}{5} + \frac{8}{7} =$ Al ser 3, 5 y 7 primos su m.c.m. es la multiplicación $3 \times 5 \times 7=105$ Luego $\frac{4}{3} + \frac{2}{5} + \frac{8}{7} = \frac{140}{105} + \frac{42}{105} + \frac{120}{105} =$ $\frac{140+42+120}{105} = \frac{302}{105} = 2\frac{92}{105}$	

e) Se vació agua en una jarra, primero medio vaso, después $\frac{3}{4}$ del vaso y al final un vaso completo, ¿cuántos vasos de agua se vació en total dentro de la jarra?

Un vaso equivale $\frac{4}{4}$, entonces la operación es $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{2+3+4}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$.
Se han vaciado dos vasos con un cuarto dentro de la jarra.

f) Se sirvió un $\frac{1}{3}$ de vaso de agua de la misma jarra. ¿Cuántos vasos de agua quedan todavía dentro de la jarra?

La operación es $2\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9}{4} - \frac{1}{3} = \frac{27}{12} - \frac{4}{12} = \frac{27-4}{12} = \frac{23}{12} = 1\frac{11}{12}$, así que en la jarra hay un vaso con once doceavos de vaso de agua.

Para pasar una fracción mixta a fracción impropia mediante el siguiente procedimiento.

2. Al resultado se le suma el numerador de la fracción.

1. Se multiplica el denominador de la fracción por el entero.

$$3+2=5$$

$$1 \times 3 = 3$$

$$1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

3. El resultado de la suma se convierte en el numerador de la fracción impropia.

4. El denominador de la fracción impropia es el mismo que el de la fracción.

Ejemplos: a) $1\frac{2}{3} = \frac{(1 \times 3) + 2}{3} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}$ b) $2\frac{1}{4} = \frac{(2 \times 4) + 1}{4} = \frac{8+1}{4} = \frac{9}{4}$ c) $3\frac{1}{2} = \frac{(3 \times 2) + 1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$

d) Realiza la suma: $1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{2}$

Primero se pasa las fracciones mixtas a impropias (incisos a, b y c). El m.c.m. de 3, 4 y 2 es 12.

$$1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{2} = \frac{5}{3} + \frac{9}{4} + \frac{7}{2} = \frac{20}{12} + \frac{27}{12} + \frac{42}{12} = \frac{20+27+42}{12} = \frac{89}{12} = 7\frac{5}{12}$$

e) Realiza la resta: $7\frac{1}{8} - 2\frac{4}{5}$

Primero se pasa las fracciones mixtas a impropias: $7\frac{1}{8} = \frac{(7 \times 8) + 1}{8} = \frac{56+1}{8} = \frac{57}{8}$, $2\frac{4}{5} = \frac{(2 \times 5) + 4}{5} = \frac{10+4}{5} = \frac{14}{5}$, además el m.c.m. de 8 y 5 es 40.

$$7\frac{1}{8} - 2\frac{4}{5} = \frac{57}{8} - \frac{14}{5} = \frac{285}{40} - \frac{112}{40} = \frac{173}{40} = 4\frac{13}{40}$$

Para **convertir un número fraccionario en decimal**, basta con dividir el numerador entre el denominador.

Ejemplos: a) $\frac{1}{3} = 1 \div 3 = 0.3333\bar{3}$; b) $\frac{7}{2} = 7 \div 2 = 3.5$ c) $\frac{5}{11} = 5 \div 11 = 0.454545\bar{45}$

Un caso especial es el de pasar **de fracción decimal a número decimal**, esto se hace escribiendo el numerador y recorrer el punto decimal hacia la izquierda, tantos espacios como ceros tenga el denominador. Ejemplos: a) $\frac{789}{10} = 78.9$, en este caso se recorrió el punto decimal un lugar a la izquierda, paso de 789 a 78.9

b) $\frac{54}{1000} = 0.054$, se recorrió el punto 3 lugares a la izquierda.

c) $\frac{1}{10000} = 0.0001$, se recorrió el punto 4 lugares a la izquierda.

Un **decimal exacto se convierte a fracción** colocando en el numerador el número sin punto decimal y en el denominador un 1 seguido de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal.

Ejemplos: a) $3.78 = \frac{378}{100} = \frac{189}{50}$ b) $0.555 = \frac{555}{1000} = \frac{111}{200}$

c) $0.25 = \frac{25}{100} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ d) $0.0001 = \frac{1}{10000}$

e) $24.058 = \frac{24058}{1000} = \frac{12029}{500}$

La suma y la resta con números decimales tienen las mismas propiedades y se hacen de la misma forma en que se suman y restan los números naturales.

Recuerda que hay tres tipos de decimales:

- exacto (7.45)
- periódico puro (0.3333333)
- periódico mixto (7.466666)

$$\begin{array}{r} 0.025 \\ + 23.558 \\ \hline 23.583 \end{array} \quad \begin{array}{r} 45.187 \\ - 3.294 \\ \hline 41.893 \end{array}$$

Para **sumar o restar números decimales** se colocan ambos números de forma que coinciden en la misma columna los puntos decimales, de esa forma coinciden todas las cifras del mismo orden. Después se suman o se restan como si fueran números naturales, el punto decimal se coloca en el resultado debajo de la columna de los puntos decimales. Sin embargo, puede ocurrir que haya algún número que no lleve todas las cifras decimales, en este caso se añade en el lugar un 0.

Al multiplicar y dividir fracciones, a diferencia de la suma y la resta, no importa si los denominadores son iguales o distintos.

Se multiplica el
numerador por el
numerador y el
denominador por
el denominador.

$$\frac{5}{10} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{10 \times 4} = \frac{15}{40}$$

Si es posible, se simplifica el producto.

$$\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{11}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{11 \times 4}{5 \times 6} = \frac{44}{30} = 1\frac{14}{30} = 1\frac{7}{15}$$

El numerador del cociente se obtiene de multiplicar el numerador del dividendo por el denominador del divisor.

$$\frac{4}{5} \div \frac{3}{2} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$$

El denominador del cociente se obtiene de multiplicar el denominador del dividendo por el numerador del divisor.

$$\frac{11}{5} \div \frac{4}{6} = \frac{11 \times 6}{5 \times 4} = \frac{66}{20} = \frac{33}{10}$$
$$\begin{array}{r} 0.23 \\ 55 \overline{) 12.69} \\ \underline{169} \\ 04 \end{array}$$

Si el **divisor no tiene decimales** la división se realiza de forma directa, pero al final se coloca el punto decimal en el cociente en la misma posición, es decir solamente se sube.

$$\begin{array}{r} 0.52 \\ \times 1.27 \\ \hline 364 \\ 104 \\ 52 \\ \hline 0.6604 \end{array}$$

El punto se recorre 4 espacios a la izquierda.

Ejemplos:

$2.12 \overline{)4.578} \Rightarrow 212 \overline{)457.8} \Rightarrow 212 \overline{)457.8}$
 $0.04 \overline{)0.501} \Rightarrow 4 \overline{)50.1}$

a) $201.62 \times 3.8 =$ $\begin{array}{r} 201.62 \\ \times 3.8 \\ \hline 161296 \\ 60486 \\ \hline 766.156 \end{array}$	b) $58.4 \times 2.1 =$ $\begin{array}{r} 58.4 \\ \times 2.1 \\ \hline 584 \\ 1168 \\ \hline 122.64 \end{array}$	c) $58.4 \div 2.1 =$ $\begin{array}{r} 2.1 \overline{) 58.4} \Rightarrow 2.1 \overline{) 58.4} \\ 2.7 \\ 21 \overline{) 58.4} \\ 164 \\ 17 \end{array}$
d) Roberto compró 105 lápices para dibujo a 10 pesos con 50 centavos, ¿cuánto gastó? $\begin{array}{r} 105 \\ \times 10.50 \\ \hline 5250 \\ 000 \\ 105 \\ \hline 1102.50 \end{array}$ Roberto gastó \$1102.50	e) Patricia necesita comprar 112 vasos, cada vaso cuesta 80 centavos, ¿cuánto se gastará en la compra? $\begin{array}{r} 112 \\ \times 0.80 \\ \hline 89.60 \end{array}$ Patricia gastará en la compra \$89.60	f) En un recipiente hay 39.37 litros de agua y María quiere envasarlos en botellas de 1.5 litros. ¿Cuántas botellas necesita? ¿Cuánta agua le sobra? $1.5 \overline{) 39.37} \Rightarrow 15 \overline{) 393.7}$ $\begin{array}{r} 26.2 \\ 15 \overline{) 393.7} \\ 93 \\ 37 \\ 7 \end{array}$ $1.5 \times 26 = 39$ $39.37 - 39 = 0.37$ Necesita 26 botellas y le sobran 0.37 litros.

Proporcionalidad directa e inversa

Una **razón matemática** es una comparación entre dos cantidades, que revela cuántas veces es mayor una de ellas con respecto a la otra, se puede ver como un cociente (una división) entre dos números que se comparan entre sí o como una fracción. Se denota como la fracción o separando los dos números con dos puntos. Así que las razones están formadas por dos cantidades, al numerador se llama **antecedente** y al denominador, **consecuente**.

Consecuente

→

3

=

3 : 4

se lee diciendo que el primer número "es a" el segundo número; así, esta razón se lee 3 es a 4.

Antecedente

→

4

En una papelería venden paquetes de lápices, en los que vienen 4 lápices y 6 bicolores, entonces la razón de la cantidad de lápices en relación con la cantidad de bicolores es de 4:6, se lee 4 es a 6.



Las razones también se pueden simplificar en fracciones equivalentes con números más pequeños, en este ejemplo se tiene que $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Lo que significa que **por cada 2 lápices hay 3 bicolores**.

Pero si se tuviera 5 paquetes, conociendo esta razón se puede calcular la cantidad de lápices que se tendrían, la operación a realizar es multiplicar el antecedente (el numerador) y el consecuente (el denominador) de la razón por cinco, que es el número de paquetes que se tendrían: $\frac{4}{6} \times \frac{5}{5} = \frac{20}{30}$, lo que significa que en 5 paquetes hay 20 lápices y 30 bicolores en total.

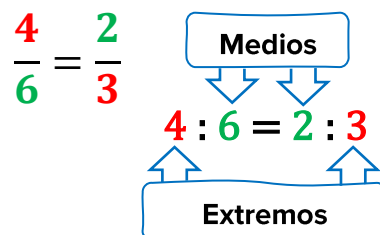
Ejemplos: a) En la compra de 3 cajas de cereal, una tienda regala 2 paquetes de pasitas. ¿Cuál es la razón de cajas de cereal para con los paquetes de pasitas? **R.** $\frac{3}{2} = 3:2$, es decir 3 es a 2.

b) Si en una empresa con 150 trabajadores, 30 son solteros, ¿cuál es la razón de personas solteras en esa empresa? Simplifica el resultado. **R.** $\frac{150}{30} = \frac{15}{3} = \frac{5}{1} = 5:1$, es decir 5 es a 1.

c) Si en una localidad hay una razón de niños y niñas a personas adultas de 1 : 3 y en el pueblo hay 40 niñas y niños, ¿cuántos adultos hay en el pueblo? **R.** $\frac{1}{3} = \frac{40 \times 1}{40 \times 3} = \frac{40}{120} = 40 : 120$, es decir hay 120 adultos.

d) En una bolsa hay una razón de $\frac{1}{9}$ en cuanto a canicas rojas con canicas azules. Si hay 5 canicas rojas, ¿cuál es la cantidad de canicas azules? **R.** $\frac{1}{9} = \frac{5 \times 1}{5 \times 9} = \frac{5}{45}$, hay 45 canicas azules.

Una **proporción matemática** es la igualdad de dos razones. Por ejemplo, en el paquete de lápices, en el que vienen 4 lápices y 6 bicolores, la razón de la cantidad de lápices en relación con la cantidad de bicolores es de 4 : 6, pero si alguien comprara medio paquete y le dieran la misma proporción de lápices y bicolores, la razón sería 2 : 3, es decir, $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.



En una proporción, a los números se les llama **medios** y **extremos** según el lugar que ocupan, una característica es que los productos de medios y extremos es igual, en este caso $4 \times 3 = 6 \times 2$.

Por ejemplo, las razones $\frac{5}{12}$ y $\frac{1}{6}$ no son una proporción pues 5×6 es diferente a 12×1 .

Existen dos tipos de proporcionalidad: directa e inversa.

Proporcionalidad directa

Si para hacer 8 jugos de naranja se requieren 40 naranjas, ¿cuántas naranjas se necesitan para hacer 12 jugos?

Entre más jugos se requieran, más naranjas se ocupan, y entre menos jugos se pidan menos naranjas se necesitan. Esta es una relación de proporcionalidad directa.

Al aumentar una cantidad, la otra también aumenta; y al disminuir una cantidad la otra también disminuye.

Se construye una tabla de proporcionalidad.

	Jugos	Naranjas	
Mitad de naranjas ←	4	20	→ Mitad de jugos
	8	40	
	12	60	

Para 12 jugos se ocupan 60 naranjas.

Proporcionalidad inversa

Si 2 albañiles construyen una barda en 8 días, ¿en cuántos días construirían la misma barda 4 albañiles?

Entre más albañiles se sumen a hacer la barda, menos días tardarán en la construcción, y entre menos albañiles trabajen más días se ocuparán para construir la misma barda.

Al aumentar una cantidad, la otra disminuye; y al disminuir una cantidad la otra aumenta.

Se construye una tabla de proporcionalidad.

	Albañiles	Días	
Doble de albañiles ←	1	16	→ Mitad de días
	2	8	
	4	4	

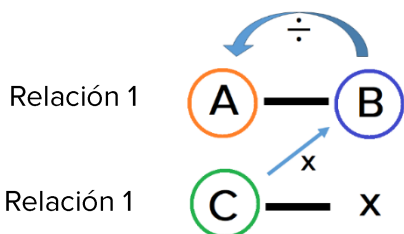
Entonces 4 albañiles construirán la misma barda en 4 días.

En una relación de proporcionalidad directa si se conocen tres valores y se desconoce uno, es posible calcularlo por medio del método **regla de tres**.

Aplicación de la regla de tres

Primero se comprueba si es un caso de proporcionalidad directa, es decir, si al aumentar una cantidad, la otra también aumenta; y al disminuir una cantidad la otra también disminuye.

Luego se escribe la proporción, si A es a C y es a X, como en el siguiente diagrama:



Para encontrar el valor de X se multiplica C por B y el resultado se divide entre A.

La proporcionalidad está dada por la relación $\frac{A}{C} = \frac{B}{X}$

Ejemplo:

Para construir una barda se necesitan 60 ladrillos por metro cuadrado, si se tienen 900 ladrillos, ¿cuántos metros cuadrados de barda se podrán construir con ellos?

R. Se observa que al tener más ladrillos se construirán más metros cuadrados e igualmente si disminuye el número de ladrillos disminuyen los metros cuadrados de barda que se pueden construir.

Ladrillos



Metros cuadrados

$$? = (1 \times 900) \div 60 = 900 \div 60 = 15$$

Se tendrán 15 metros cuadrados de barda con 900 ladrillos.

La proporcionalidad está dada por la relación

$$\frac{60}{1} = \frac{900}{?}$$

Ejemplo: Si por 12 llaveros del mismo precio se pagaron 222 pesos, ¿cuánto se pagará por 16 llaveros como esos?

R. Sí existe proporcionalidad directa ya que si se compran más llaveros se pagará más.

Llaveros	12	----	16
\$	222	----	?

$$? = (222 \times 16) \div 12 = 3552 \div 12 = 296$$

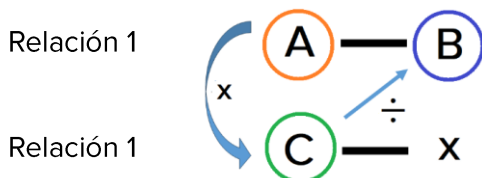
Se pagará \$296 por 16 llaveros.

También se tiene la **regla de tres inversa** para encontrar un dato que falte en una proporción inversa.

Aplicación de la regla de tres inversa

Primero se comprueba si es un caso de proporcionalidad inversa, es decir, si al aumentar una cantidad, la otra disminuye; y al disminuir una cantidad la otra aumenta.

Luego se escribe la proporción, si A es a C y es a X, como en el siguiente diagrama:



Para encontrar el valor de X se multiplica A por C y al resultado se divide entre B.

La proporcionalidad está dada por la relación $\frac{A}{C} = \frac{B}{X}$

Ejemplo:

Si una alberca se llena en 10 horas con 3 litros de agua por segundo, ¿en cuánto tiempo se llenará si el agua fluye a 5 litros por segundo?

R. Se observa que al disminuir los litros por segundo el tiempo de llenado aumenta, y viceversa si aumentan los litros por segundo el tiempo de llenado disminuye.

Litros por segundo 3 ---- 5

Horas 10 ---- ?

$$? = (3 \times 10) \div 5 = 30 \div 5 = 6$$

Se llenará en 6 horas con 5 litros de agua por segundo.

La proporcionalidad está dada por la relación

$$\frac{3}{10} = \frac{5}{?}$$

Ejemplo: Si 15 personas hacen un trabajo en 20 horas, ¿cuánto tiempo tardarán en hacer el mismo trabajo 10 personas?

R. Sí existe proporcionalidad inversa ya que si disminuye la cantidad de personas aumentará el tiempo en hacer el trabajo.

Personas 15 ---- 10
Horas 20 ---- ? $? = (15 \times 20) \div 10 = 300 \div 10 = 30$

Entonces 10 personas realizarán el trabajo en 30 horas.

Croquis, planos y mapas para conocer ubicaciones

Las representaciones gráficas del espacio explican la distribución de un determinado lugar, estas pueden ser bosquejos, ilustraciones, imágenes y dibujos, pueden ser simples como unas líneas dibujadas a mano en un papel, a complejas, es decir muy detalladas con información como mapas, planos, etc.

Algunas representaciones en dos dimensiones: ancho y largo, son los croquis, planos y mapas.

Croquis: dibujo utilizado para localizar en forma aproximada un lugar o un objeto. Es la más sencilla y utilizada por las personas, por ejemplo, al dar las indicaciones para llegar a alguna casa.



Plano: su objetivo es mostrar lo más parecido posible el lugar que están recreando o se va a construir, requiere conocimiento técnico para su elaboración.



Mapa: representa la superficie terrestre o de una parte de esta, muestra información resumida y general sobre sus características (incluye mediciones y características específicas).



Es importante siempre tener orientación al hacer una representación del espacio, para ello se han usado los **puntos cardinales**: norte, sur, este y oeste.



La **brújula** ayuda a localizar algún lugar o saber hacia dónde dirigirte, este instrumento consiste en una cajita con una aguja imantada que siempre señala hacia el norte terrestre. Ha sido muy útil en la navegación y las exploraciones de territorios desconocidos.

En planos y mapas generalmente la información se muestra considerando el norte en la parte superior, en ellos se agrega la **rosa de los vientos** o una flecha que lo indique. Si por algo no estuviera esta señalización, se considera que el norte está en la parte de arriba del mapa.

Retomando los **croquis** vemos que estos también se utilizan en los edificios, centros comerciales, escuelas y otros espacios donde sea necesario señalar a las personas las entradas y salidas, los sitios de interés y los elementos básicos del lugar.

Observando el croquis se puede decir que:

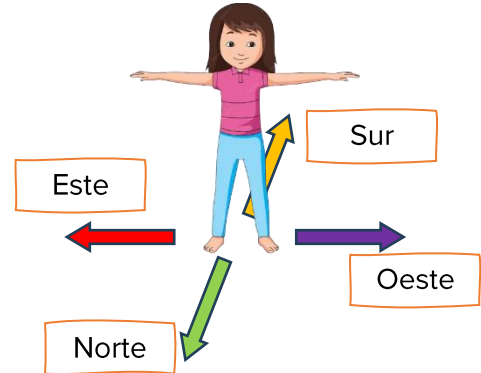
- La biblioteca está en la calle La paz.
- La iglesia se encuentra en la esquina de la calle Hidalgo y la calle Libertad.
- La escuela está entre la calle Libertad y la calle Independencia.
- La farmacia se localiza en la calle Hidalgo.

Por otro lado, en los planos se incluyen características técnicas, entre ellas:

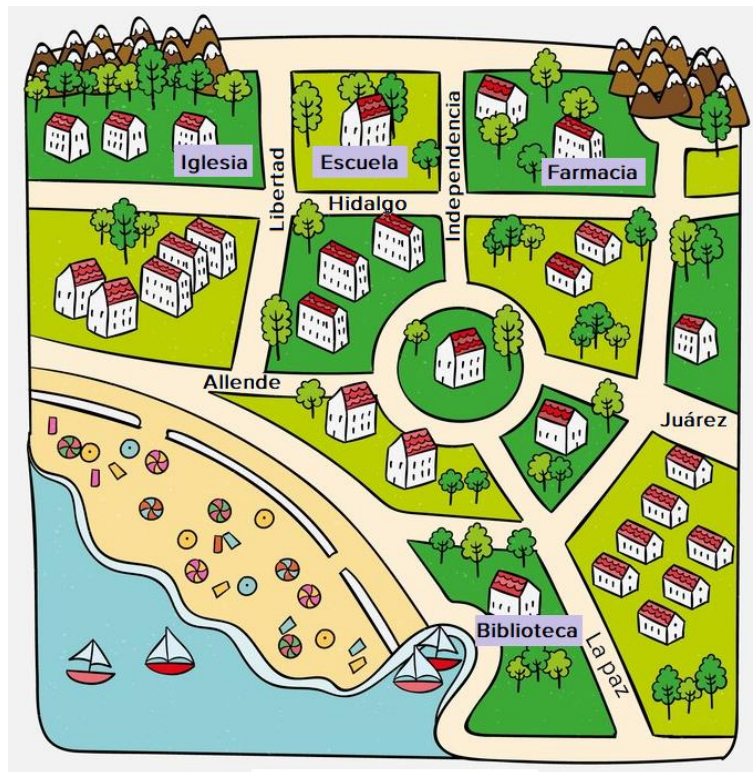
- Medidas a escala.
- Señalamiento de lugares.
- Límites de la propiedad o sitio.
- Características específicas, como puertas, ventanas o ubicación de mobiliario.
- Nombre del autor y fecha.

Los **planos** utilizan los mismos símbolos para representar elementos como puertas, ventanas y ciertos espacios, como el baño, se usan flechas con las medidas de cada pared o espacio.

¿Cómo identificar los puntos cardinales?



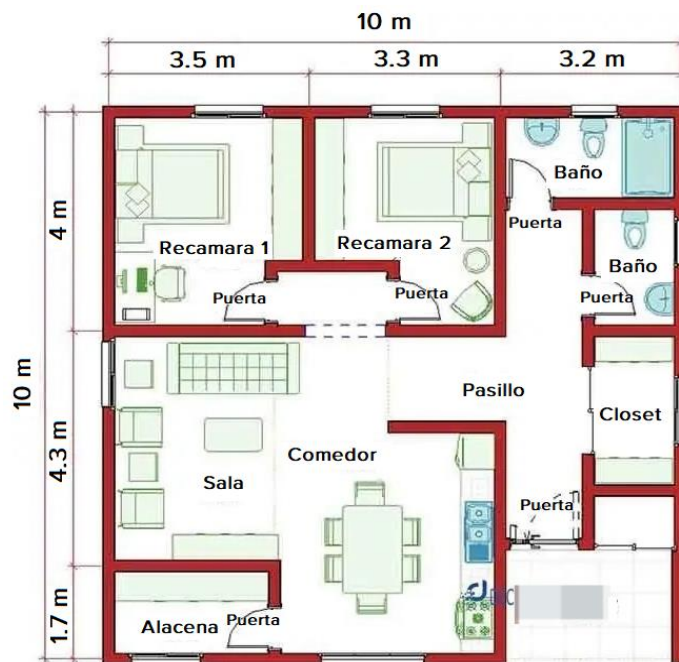
Se coloca de pie teniendo a la derecha por donde sale el sol y mirando hacia el frente con los brazos extendidos, de esa forma el brazo derecho señalará el este, el izquierdo el oeste, el norte te quedará hacia el frente y el sur detrás.



Asimismo, los planos de edificaciones dan información de las medidas reales de cada espacio y la medida total de la propiedad.

Ejemplo: Observa el plano y responde las preguntas.

- ¿Cuántas habitaciones terminadas tiene la vivienda?
La casa cuenta con 2 recámaras.
- ¿Cuántas puertas tiene en total?
Hay 6 puertas.
- ¿Cuánto mide de ancho la alacena?
Mide 1.7 metros.
- ¿Cuánto mide la fachada?
Mide 10 metros.
- ¿Cuánto mide la recámara 1?
Mide 4 m por 3.5 m
- ¿Cuánto mide la recámara 2?
Mide 4 m por 3.3 m



El **mapa** es una representación gráfica de la superficie terrestre o de una parte de esta, que muestra información resumida y general sobre sus características. Los mapas se realizan a escala, lo que significa que las distancias están reducidas miles o millones de veces las dimensiones terrestres. La cartografía es el estudio de los mapas, también conocidos como cartas geográficas.

Características principales de los mapas

- Muestran la escala a la que están hechos.
- Presentan cierta distorsión debido a la superficie curva y tridimensional de la Tierra que está reproducida en una hoja de papel (dos dimensiones), por esto, en algunos puntos se alargan las distancias y en otros se acortan.
- Se elabora con una proyección cartográfica o sistema de elaboración específico, para reducir dichas distorsiones en el espacio que se desea mostrar.
- Cada mapa tiene un objetivo: elementos naturales (ríos, montañas, etc.), aspectos culturales (lenguas habladas, gastronomía, etc.), condiciones sociales (distribución de la riqueza, etc.) entre otros.
- Incluyen el uso de símbolos, pictogramas, colores y otros elementos de diseño para indicar las características estudiadas.

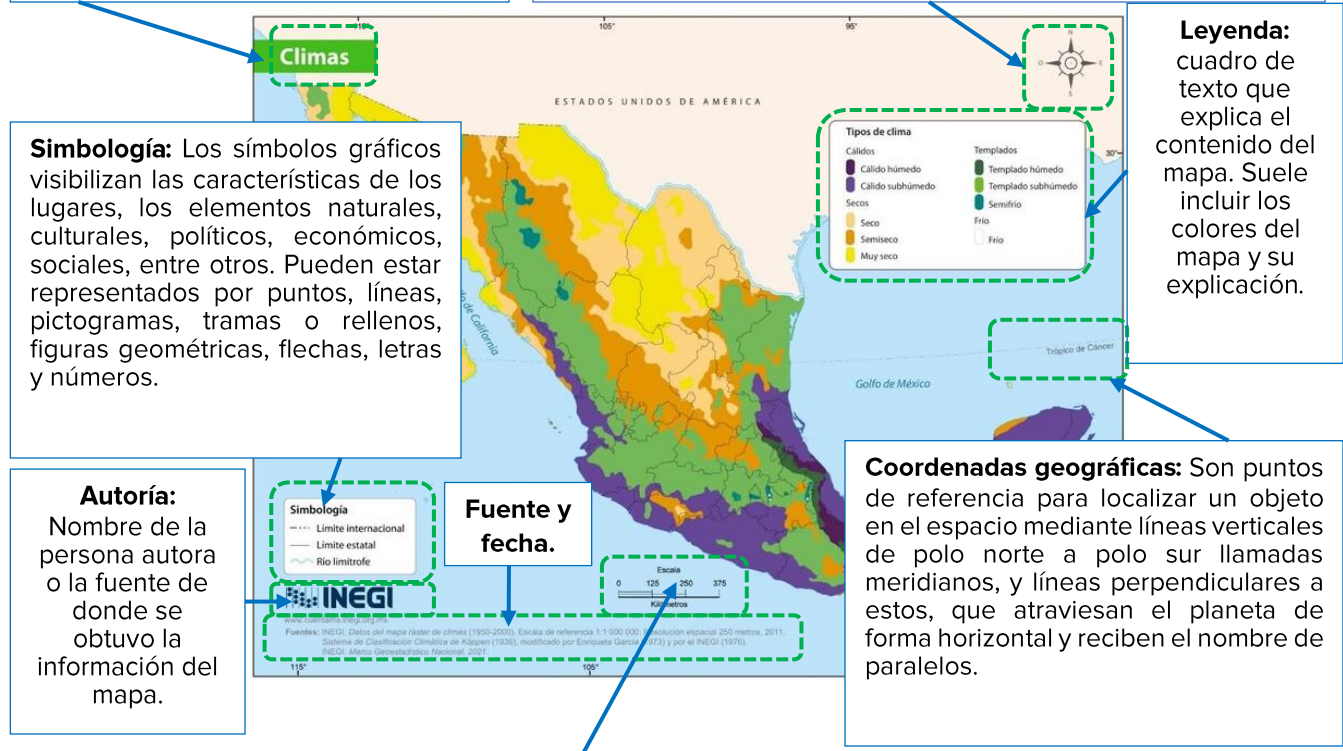


Fuente:
<https://www.inegi.org.mx/app/areasgeograficas/?ag=07000011#tabMCcollapse-Indicadores>

Los mapas tienen elementos que permiten interpretar la información que contienen. Observa en el mapa que indica los climas de la República mexicana, se identifican sus elementos y su descripción.

Título: Indica el hecho, fenómeno o característica que se representa, facilita elegir el más adecuado.

Rosa de los vientos: figura en forma de estrella que señala hacia dónde se localizan los puntos cardinales: norte, sur, este y oeste; y sus subdivisiones: noreste, sureste, noroeste, suroeste.



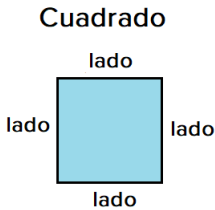
Escala: Los mapas son más pequeños que la superficie que representan, pero existe una proporción con el tamaño real. La escala indica la diferencia de tamaños. Hay diversas escalas, dependiendo del nivel de detalle que se desee analizar. Pueden representarse de tres formas: numérica, gráfica y como una oración corta.

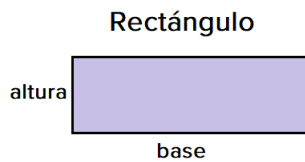
■ Escala numérica	1: 50 000
■ Escala gráfica	0 100 200 Metros
■ Escala verbal	Un centímetro representa 50 000 metros

Cuando se diseñan mapas sencillos, se selecciona su tamaño de acuerdo con el tema a tratar y decidir si va a abarcar una comunidad, un estado, todo el país o el continente. También contar con la información que se va a representar en él, colorear los lugares con el mismo color o con distintas tonalidades, del más claro al más oscuro, así se identificará mejor la información.

Perímetro y área del cuadrado y del rectángulo

En un **cuadrado**, todos los lados son iguales.
Los lados de un **rectángulo** sí pueden ser nombrados de cierta forma: a los lados horizontales se les llama base y a los lados verticales, altura.



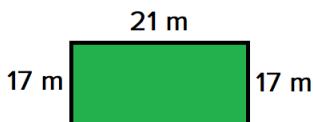
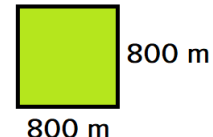


El **perímetro** es la suma de la medida de cada uno de los lados de una figura, por ejemplo, se tiene un terreno cuadrado y se va a cercar, es necesario saber cuánta malla comprar, sin que sobre ni que falte, así que lo que se necesita conocer es el perímetro del terreno. Cada lado del terreno mide 800 metros, el **perímetro es la longitud del borde de una figura**, para calcularlo se suma la longitud de cada uno de sus lados (para abreviar

perímetro se usa la letra P mayúscula).

$$P = 800 \text{ m} + 800 \text{ m} + 800 \text{ m} + 800 \text{ m} = 3200 \text{ m}$$

Se observa también que el terreno es cuadrado, es decir tiene 4 lados iguales, por lo que $P = 4 \times 800 \text{ m} = 3200 \text{ m}$



Ejemplo: Diana quiere cercar un terreno rectangular, aunque solamente conoce la medida de tres lados: uno mide 21 metros y los otros miden 17 metros. ¿Cuánto mide el lado que desconoce?, ¿cuánta malla va a necesitar para cercar el terreno?

R. Un rectángulo tiene dos lados iguales y otros dos iguales, entonces se deduce que el otro lado mide 21 metros. Ahora sí ya se puede calcular el perímetro: $P = 21 \text{ m} + 21 \text{ m} + 17 \text{ m} + 17 \text{ m} = 76 \text{ m}$; esta suma se abrevia con una multiplicación como $P = (21 \text{ m} \times 2) + (17 \text{ m} \times 2) = 42 \text{ m} + 34 \text{ m} = 76 \text{ m}$.

$$\text{Perímetro del rectángulo} = (2 \times \text{base}) + (2 \times \text{altura})$$

$$\text{Perímetro del cuadrado} = 4 \times \text{lado}$$

El **área** de una figura geométrica es toda su superficie. Suele medirse en metros, centímetros y kilómetros cuadrados, entre otras unidades. Para calcular el área de un cuadrado es necesario saber la medida de un lado, y para calcular el área de un rectángulo se requieren las medidas de la base y la altura.

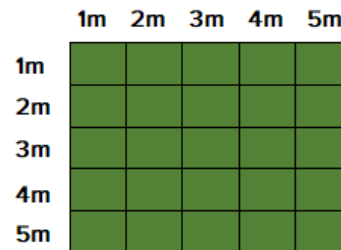
Ejemplos: a) Diana quiere sembrar tomates en su terreno. Para eso, necesita saber cuántos metros cuadrados mide, las medidas de sus lados son 17 m de altura y 21 de base, cada cuadrado representa un metro cuadrado. Si los cuenta, sabrá cuánta superficie tiene su terreno.

Para no contar cuadro por cuadro puede realizar una multiplicación, $21 \text{ m} \times 17 \text{ m} = 357 \text{ m}^2$

Se representa el área del **rectángulo** con una "A" entonces **A = base x altura**, así sustituyendo los valores $A = 21 \text{ m} \times 17 \text{ m} = 357 \text{ m}^2$

b) Un jardín **cuadrado** de 5 m de lado, tiene un total de 25 m^2 de área.

La fórmula, que indica que el área de un cuadrado es igual a la multiplicación de dos de sus lados, se representa el área con una "A" y cada lado con una "l": **A = l x l**, así sustituyendo los valores $A = 5 \text{ m} \times 5 \text{ m} = 25 \text{ m}^2$



c) Calcular el área de las siguientes figuras.

$A = l \times l = 8 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} = 64 \text{ cm}^2$	$A = \text{base} \times \text{altura} = 11 \text{ cm} \times 7 \text{ cm} = 77 \text{ cm}^2$	$A = \text{base} \times \text{altura} = 15 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^2$

$$\text{Área del rectángulo} = \text{base} \times \text{altura}$$

$$\text{Área del cuadrado} = \text{lado} \times \text{lado}$$

Los siguientes pasos te ayudarán a resolver problemas de áreas de cuadrados y rectángulos.

- **Lee el problema**, si te hablan de un cuadrado, un rectángulo o si tú tienes que averiguarlo.
- **Identifica los datos**, si te dan la base, la altura o alguno de los datos del cuadrado.

- **Infiere.** Si te falta algún dato, pregúntate si lo puedes obtener.
- **Calcula** lo que te piden, usa la fórmula, revisa dos veces tu respuesta.
- **Elige tu respuesta.** ¡Lee y reflexiona la retroalimentación, te ayudará a aprender más!

Ejemplos: Resuelve los siguientes problemas.

a) Se van a colocar postes alrededor de un jardín rectangular, excepto en las esquinas. Si caben 16 a lo largo y 7 a lo ancho colocados a la misma distancia, ¿cuántos postes se necesitarán?

R. Al ser la figura un rectángulo, se sumarán de cada lado, $P = (2 \times 16) + (2 \times 7) = 32 + 14 = 46$, así que se necesitarán 46 postes.

b) Rafael tiene dos corrales rectangulares, uno con cerca de alambre de 16 metros de largo y 5 metros de ancho y otro sin cercar, de 14 metros de largo y 8 metros de ancho. Necesita quitar la cerca del primero para ponerla en el segundo, pero como no son de la misma medida tendrá que comprar alambre adicional. ¿Cuántos metros más necesita comprar?

R. La cantidad de alambre en el primer corral es de $P = (2 \times 16 \text{ m}) + (2 \times 5 \text{ m}) = 32 \text{ m} + 10 \text{ m} = 42 \text{ m}$; la cantidad de alambre que necesitará en el segundo corral es de $P = (2 \times 14 \text{ m}) + (2 \times 8 \text{ m}) = 28 \text{ m} + 16 \text{ m} = 44 \text{ m}$, entonces necesitará comprar 2 m más de alambre.

c) En un hotel hay una piscina cuyo fondo es rectangular, tiene un lado de 500 cm y otro de 10 m. ¿Cuál es el área del fondo de la piscina?

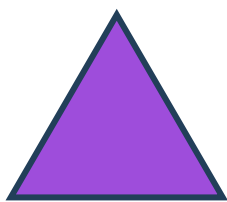
R. Primero se deben de tener las medidas en las mismas unidades, como $500 \text{ cm} = 50 \text{ m}$, entonces $A = \text{base} \times \text{altura} = 50 \text{ m} \times 10 \text{ m} = 500 \text{ m}^2$, el área del fondo de la piscina mide 500 m^2 .

d) Ismael va a pintar una pared rectangular; la altura de dicha pared es de 2 metros y el largo es de 33 metros. Si cada bote de pintura rinde 10 metros cuadrados, ¿cuántos necesita comprar para pintar la pared?

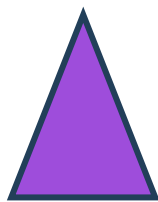
R. Se necesita saber la medida de la superficie de la pared, $A = \text{base} \times \text{altura} = 33 \text{ m} \times 2 \text{ m} = 66 \text{ m}^2$. Si cada bote rinde 10 m^2 , entonces se necesitan 7 botes, pues con 6 no se alcanzaría.

Perímetro y área del triángulo y del círculo

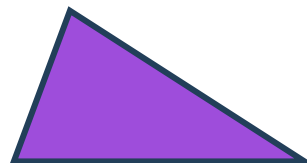
Los triángulos de acuerdo con la medida de sus lados se clasifican en equilátero, isósceles y escaleno.



Triángulo equilátero: todos sus lados tienen la misma medida iguales.



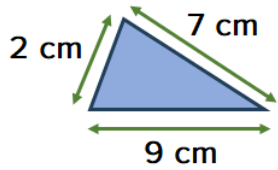
Triángulo isósceles: dos lados tienen la misma medida y uno diferente.

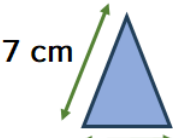


Triángulo escaleno: todos sus lados son de diferente medida.

Recuerda que para calcular el perímetro solamente se suma la longitud de cada uno de los lados de una figura.

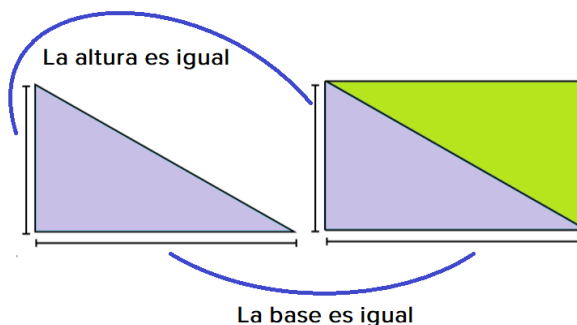
Ejemplo: Calcular el perímetro de cada uno de los triángulos.

a)	b)	c) 
----	----	--

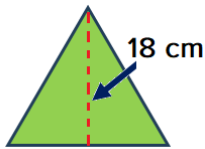
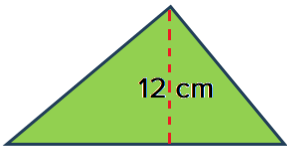
 8 cm La imagen solamente indica la medida de uno de sus lados, además se observa que es un triángulo equilátero. Así que sus tres lados miden lo mismo: $P = 8\text{ cm} + 8\text{ cm} + 8\text{ cm} = 24\text{ cm}.$	 7 cm 4 cm Se indica la medida solamente de dos lados, pero según la imagen el triángulo es isósceles así que entonces la medida del lado que no está indicado es 7 cm. $P = 7\text{ cm} + 7\text{ cm} + 4\text{ cm} = 18\text{ cm}.$	Se indican las medidas de los tres lados, que son diferentes, es decir, el triángulo es escaleno. $P = 2\text{ cm} + 7\text{ cm} + 9\text{ cm} = 18\text{ cm}.$
---	---	--

Si un rectángulo y un triángulo tienen la misma base y altura, entonces se puede observar que el área del rectángulo es el doble del área del triángulo, es decir el área del triángulo es la mitad de área que el rectángulo. Así que el área del triángulo estará dada por la fórmula

$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$



Ejemplo: Calcular el área de cada uno de los triángulos.

a)  18 cm 23 cm La base mide 23 cm y la altura 18 cm. $A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{23\text{ cm} \times 18\text{ cm}}{2} = \frac{414\text{ cm}^2}{2} = 207\text{ cm}^2$	b)  12 cm 35 cm La base mide 35 cm y la altura 12 cm. $A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{35\text{ cm} \times 12\text{ cm}}{2} = \frac{420\text{ cm}^2}{2} = 210\text{ cm}^2$	c)  70 cm 124 cm La base mide 1254 cm y la altura 70 cm. $A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{70\text{ cm} \times 124\text{ cm}}{2} = \frac{8680\text{ cm}^2}{2} = 4340\text{ cm}^2$
---	---	---

Se recordará las propiedades del círculo y la relación con el número pi (π).

Circunferencia: conjunto de puntos cuya distancia a un punto fijo, llamado centro.

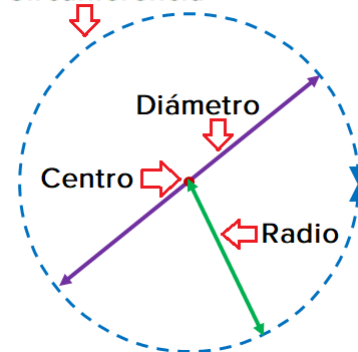
Centro: punto fijo dentro de la circunferencia, cuya distancia a cualquier punto en el contorno es la misma.

Radio: distancia del centro del círculo a cualquiera de los puntos de la circunferencia.

Diámetro: segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia y que pasa por el centro de la circunferencia. Mide el doble de un radio. El perímetro es igual a la medida de la circunferencia, el valor de pi está dado por la longitud de la circunferencia dividida entre la longitud del diámetro, es decir, el perímetro entre el diámetro:

$$\frac{\text{Perímetro}}{\text{Diámetro}} = \pi = 3.14159265359 \dots$$

Circunferencia



Como π tiene infinidad de cifras decimales, no se puede escribir todo el valor completo del número; entonces, se abrevia como **3.1416**

Ahora que ya reconociste el número pi y la proporción entre el perímetro y el diámetro del círculo, observa la siguiente fórmula para calcular el **perímetro de un círculo**: $P = \pi \times \text{diámetro}$

Ejemplos: a) ¿Cuál es el perímetro de una pizza que mide 46 cm de diámetro?

$$P = \pi \times \text{diámetro} = 3.1416 \times 46 \text{ cm} = 144.5136 \text{ cm}$$

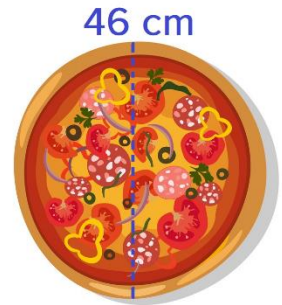
b) ¿Cuál es el perímetro de un círculo cuyo diámetro mide 10 km?

$$P = \pi \times \text{diámetro} = 3.1416 \times 10 \text{ km} = 31.416 \text{ km}$$

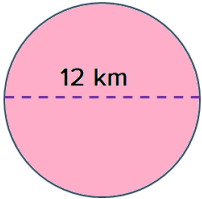
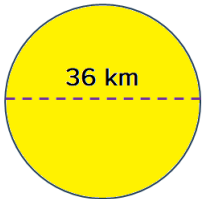
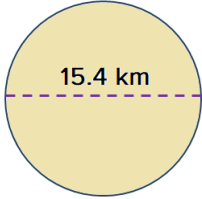
El área de un círculo es con la siguiente fórmula: $A = \pi \times \text{radio} \times \text{radio}$

Por ejemplo, el área de la pizza del ejemplo anterior es

$$A = \pi \times \text{radio} \times \text{radio} = 3.1416 \times 23 \text{ cm} \times 23 \text{ cm} = 1\,661.9064 \text{ cm}^2$$



Ejemplos: Calcular el área de cada uno de los círculos.

a)  $A = \pi \times \text{radio} \times \text{radio} = 3.1416 \times 6 \text{ km} \times 6 \text{ km} = 113.0976 \text{ km}^2$	b)  $A = \pi \times \text{radio} \times \text{radio} = 3.1416 \times 18 \text{ km} \times 18 \text{ km} = 1\,017.878 \text{ km}^2$	c)  $A = \pi \times \text{radio} \times \text{radio} = 3.1416 \times 7.7 \text{ km} \times 7.7 \text{ km} = 186.265 \text{ km}^2$
--	--	---

Ejemplos de resolución de problemas:

a) Un rectángulo se corta por la mitad de forma que se obtienen dos triángulos, si el rectángulo mide de base 150 cm y de altura de 2 m, ¿cuál es el área de cada nuevo triángulo?

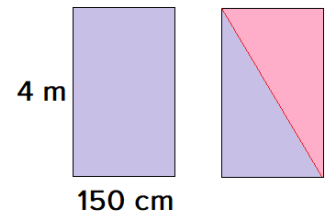
R. Las medidas de los nuevos triángulos tienen como base 150 cm y 4 m de altura, para obtener el área primero se deben tener las medidas en las mismas unidades, así que $4 \text{ m} = 400 \text{ cm}$.

$$\text{Ahora } A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{150 \text{ cm} \times 400 \text{ cm}}{2} = \frac{60\,000 \text{ cm}^2}{2} = 30\,000 \text{ cm}^2.$$

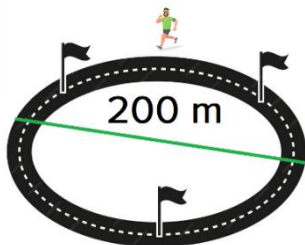
b) Se están haciendo adornos en forma de triángulos isósceles, se busca colocarles un bies alrededor. Cada lado igual mide 36 cm y 20 cm el lado diferente. ¿Cuál es la longitud del bies que usará en cada adorno?

R. La longitud de los lados de los triángulos son 36 cm, 36 cm y 20 cm, lo que solicita es el perímetro de cada triángulo, así que $P = 36 \text{ cm} + 36 \text{ cm} + 20 \text{ cm} = 92 \text{ cm}$. Se usará 92 cm de bies en cada adorno.

c) Una llanta de coche tiene un diámetro de 40 cm, ¿cuál será el perímetro de la llanta?



R. El perímetro de una circunferencia está dada a $P = \pi \times \text{diámetro} = 3.1416 \times 40 \text{ cm} = 125.664 \text{ cm}$

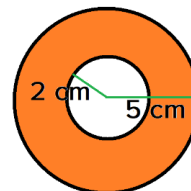


d) Manuel corre todas las mañanas alrededor de una pista circular cuyo diámetro es de 200 metros, si le da dos vueltas entonces ¿cuántos metros corre diariamente?, ¿cuál es el área que está dentro de la pista?

R. Se debe obtener el perímetro de la pista, $P = \pi \times \text{diámetro} = 3.1416 \times 200 \text{ m} = 628.32 \text{ m}$, para saber cuántos metros corre Manuel es necesario multiplicarlo por dos, $628.32 \text{ m} \times 2 = 1256.64 \text{ m}$.

El área de la superficie dentro de la pista es de $A = \pi \times \text{radio} \times \text{radio} = 3.1416 \times 100 \text{ m} \times 100 \text{ m} = 31\,416 \text{ m}^2$

e) ¿Cuál es el área de la parte sombreada de la



siguiente imagen?

R. El área de la circunferencia grande es

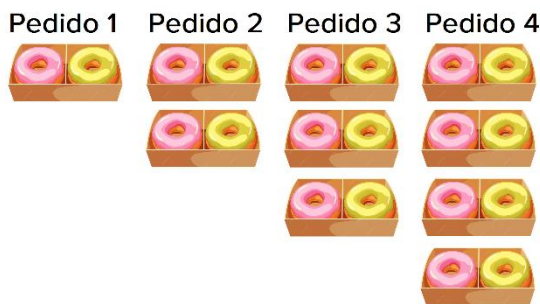
$A_g = \pi \times \text{radio} \times \text{radio} = 3.1416 \times 5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} = 78.5475 \text{ cm}^2$,

el área de la circunferencia pequeña es de

$A_c = \pi \times \text{radio} \times \text{radio} = 3.1416 \times 2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 12.5664 \text{ cm}^2$

El área solicitada es la diferencia entre estas dos áreas, entonces $78.5475 \text{ cm}^2 - 12.5664 \text{ cm}^2 = 65.9811 \text{ cm}^2$

Sucesiones de números o figuras aritméticas y geométricas



Observa la imagen de la izquierda, muestra los pedidos de donas en una panadería. Los pedidos representan una sucesión porque tanto los números de pedido como las donas se siguen uno después del otro, en este caso se van incrementando, pero en otros ejemplos pueden irse reduciendo de forma constante y progresiva.

A las **sucesiones** también se les conoce como **progresiones** porque sus números o figuras se siguen progresivamente uno después del otro.

En una progresión, a cada número o figura se le llama **término**, y recibe el nombre de un número ordinal

dependiendo del lugar que ocupe de izquierda a derecha, la sucesión de las donas es:

1er término 2do término 3er término 4to término ...

2 4 6 8 ...

Observa que los números se van incrementando de forma constante de dos en dos, $2, 2 + 2 = 4, 4 + 2 = 6, 6 + 2 = 8, \dots$

Si se tiene la sucesión $20, 17, 14, 11, \dots$, se observa que los números van disminuyendo de forma constante de dos en dos, es decir se le resta 3 al anterior para conocer el siguiente en la sucesión.

A la **constante** que se le agrega o se le quita a cada **término** de una progresión se le llama **diferencia**. Es una constante porque su valor es siempre el mismo en toda la progresión. En el ejemplo anterior, la diferencia es -3 .

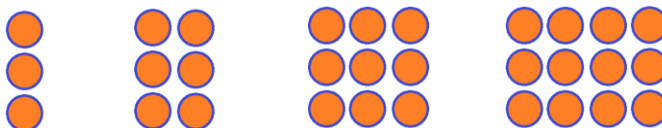
Ejemplos: a) ¿Cuál es el tercer término en esta progresión: $4, 7, 10, 13, \dots$?

R. El tercer término es 10.

b) ¿Cuál es el valor de la diferencia en la progresión: $6, 11, 16, 21, \dots$?

R. La diferencia es 5, ya que $11 - 6 = 5, 16 - 11 = 5, 21 - 16 = 5$.

c) ¿Cuál es el valor de la diferencia en esta progresión?



R. La progresión es $3, 6, 9, 12, \dots$, la diferencia es 3, ya que $6 - 3 = 3, 9 - 6 = 3, 12 - 9 = 3$.

Existen dos tipos de progresiones, la aritmética y la geométrica.

Progresión aritmética

La diferencia se le suma o se le resta a cada término para obtener el término siguiente.

Ejemplos:

1, 5, 9, 13, 17

Diferencia = +4

20, 17, 14, 11, 8

Diferencia = - 3

Progresión geométrica

La diferencia se le multiplica o se le divide a cada término para obtener el término siguiente.

Ejemplos:

5, 10, 20, 40, 80

Diferencia = $\times 2$

324, 108, 36, 12, 4

Diferencia = $\div 3$

Las progresiones geométricas crecen o decrecen más rápido que las progresiones aritméticas ya que al multiplicar o dividir agrega o quita, cada vez, una cantidad mayor a cada término, en comparación a como lo hace el sumar o restar.

Ejemplos: a) ¿Cuál es la diferencia en la progresión: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...?

R. Esta progresión geométrica inicia en el número 1, si se multiplica por 2 el primer término se encuentra el segundo, que es $1 \times 2 = 2$, el tercer término es $2 \times 2 = 4$, el cuarto es $4 \times 2 = 8$, esto significa que cada vez el término siguiente es del doble que el anterior, la diferencia es $\times 2$

b) ¿Cuál es la diferencia en la progresión: 375, 75, 15, 3?

R. Esta progresión geométrica inicia en el número 375, si se divide entre 5 el primer término se encuentra el segundo, que es $375 \div 5 = 75$, el tercer término es $75 \div 5 = 15$, el cuarto es $15 \div 5 = 3$, esto significa que cada vez el término siguiente es la quinta parte del anterior, la diferencia es $\div 5$.

Estrategias para completar las progresiones aritméticas y geométricas

1. Al comparar los términos con el siguiente se puede saber si la progresión crece o decrece.
2. Si una progresión va creciendo, la diferencia proviene de una suma o de una multiplicación a cada uno de los términos. Pero si la progresión va decreciendo, la diferencia proviene de una resta o de una división.
3. La diferencia en la progresión proviene de la operación contraria. Es decir
- 4.

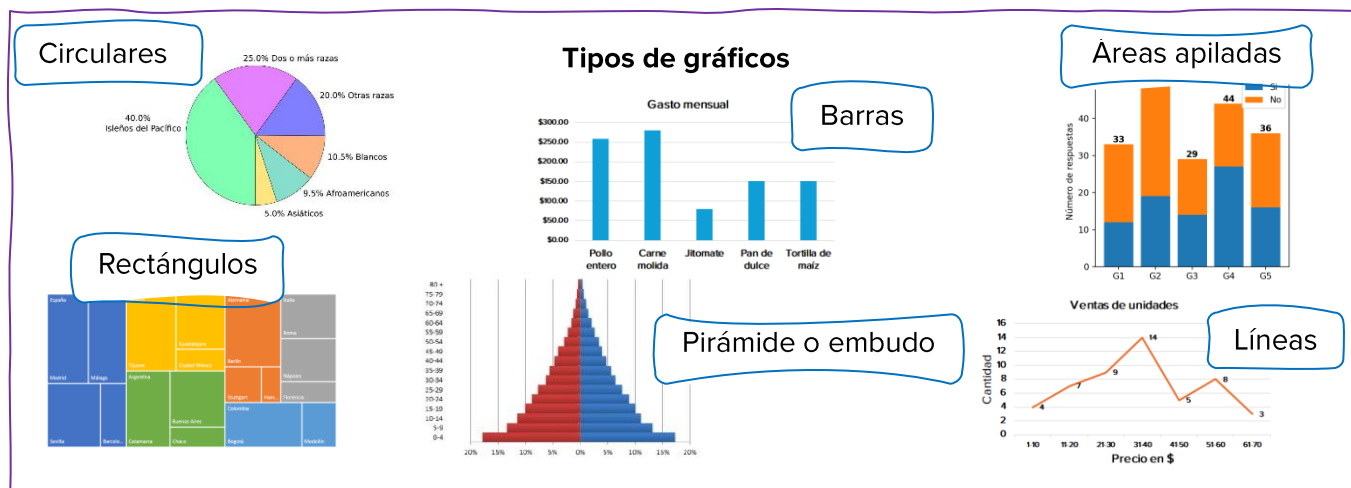
Si la diferencia se obtuvo	La operación para obtener el número faltante en la progresión es:
Restando	La suma
Dividiendo	La multiplicación
Sumando	La resta
Multiplicando	La división

Gráficas circulares

Los gráficos estadísticos o diagramas representan un conjunto de datos de forma visual con la finalidad de comprender mejor la información, así que son una herramienta útil para el análisis de los datos pues describen, resumen y analizan la información estadística y complementan las tablas.

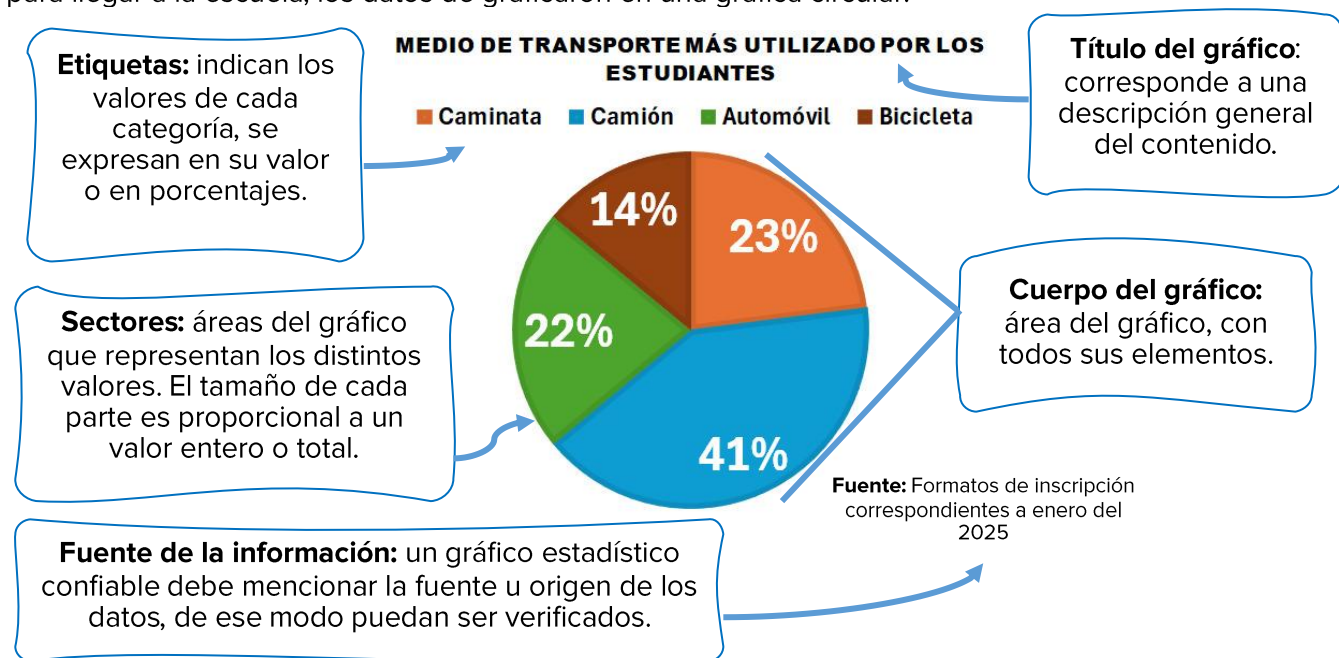
Las gráficas al ser una forma más sencilla de presentar la información son muy utilizadas por quienes formulan datos cuantitativos y desean darlos a conocer, se usan en las instituciones, empresas, medios de comunicación, personas científicas;

Hay diferentes tipos de gráficos, cada uno tiene sus características, por ellos según la naturaleza de los datos y de lo que se dese transmitir se escoge al más adecuado.



Solamente se revisará el **gráfico circular** o también conocido como **gráfico de pastel**. Los elementos de un gráfico son el título, los datos que se van a graficar, el cuerpo del gráfico, los sectores o categorías, las etiquetas, la leyenda y la fuente de la información.

Ejemplo: En una escuela realizaron una encuesta acerca del transporte que utilizan más frecuentemente para llegar a la escuela, los datos de graficaron en una gráfica circular:



El gráfico entero representa el todo y cada sector las partes en que se divide o fracciona ese todo, de modo que, así como se divide un pastel en rebanadas, también se reparte el gráfico circular, de ahí que también se le llama gráfica de pastel. Mediante un ejemplo se explicará cómo se elabora una gráfica circular.

Ejemplo: Del registro de un centro deportivo se tomaron los datos del mes de enero de acuerdo con el deporte que realizarían las personas, los resultados fueron los siguientes: fútbol 97, atletismo 44, béisbol 31, natación 14 y basquetbol 10. Se construyó primero una tabla de frecuencias absoluta y relativa.

La **frecuencia absoluta** es el número de veces que se repite un dato; en este ejemplo es el número de personas que asistieron a practicar un deporte.

La **frecuencia relativa** es el porcentaje; se calcula dividiendo la frecuencia absoluta entre el total de datos y multiplicarlo por 100. La suma de las frecuencias relativas es 100% o un valor muy aproximado. En el ejemplo, la frecuencia relativa de fútbol es $\frac{97}{196} \times 100 = 49.48$, aproximadamente 49.5.

Para atletismo $\frac{44}{196} \times 100 = 22.5$, para béisbol $\frac{31}{196} \times 100 = 15.8$, para natación $\frac{14}{196} \times 100 = 7.1$, para basquetbol $\frac{10}{196} \times 100 = 5.1$

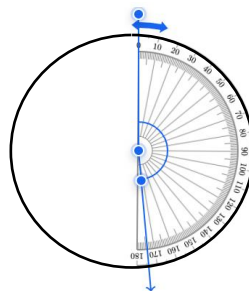
Deporte	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Fútbol	97	49.5%
Atletismo	44	22.5%
Béisbol	31	15.8%
Natación	14	7.1%
Basquetbol	10	5.1%
Totales	196	100%

Para hacer una gráfica circular fue necesario calcular el tamaño de cada uno de los sectores del círculo. Ya que cada círculo tiene 360°, se dividió 360 entre las 196 personas y el resultado fue de 1.84 grados, luego se multiplicó esta cantidad por el número de personas que van a hacer cada deporte.

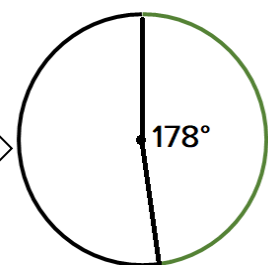
Así que, para fútbol la operación es $1.84 \times 97 = 178.48^\circ$, se redondea a 178; para atletismo es $1.84 \times 44 = 80.96^\circ$, se redondea a 81°; para béisbol es $1.84 \times 31 = 57.04^\circ$, se redondea a 57°; para natación es $1.84 \times 14 = 25.76^\circ$ se redondea a 26°; y para basquetbol $1.84 \times 10 = 18.4^\circ$, se redondea a 18°. La suma de los grados debe ser 360°.

Deporte	Frecuencia absoluta	Grados	Frecuencia relativa
Fútbol	97	178°	49.5%
Atletismo	44	81°	22.5%
Béisbol	31	57°	15.8%
Natación	14	26°	7.1%
Basquetbol	10	18°	5.1%
Totales	196	360°	100%

Se trazó una circunferencia y en ella, con ayuda de un transportador, un ángulo de 178°.



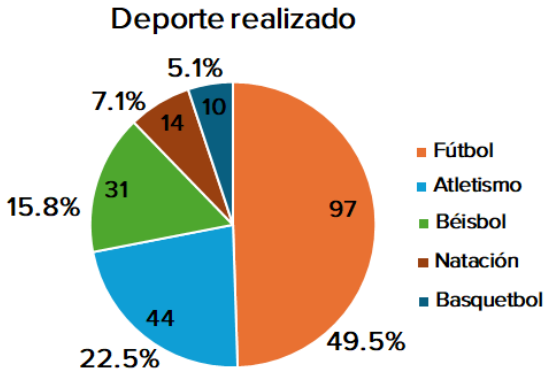
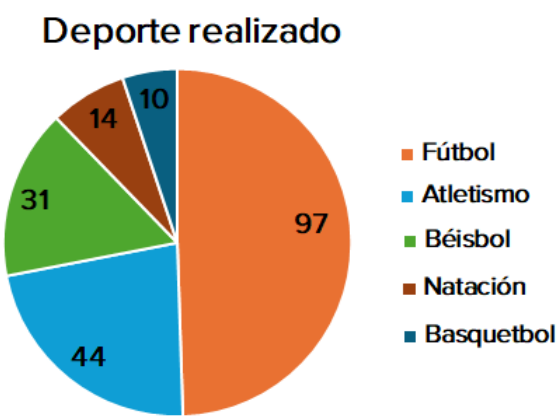
Luego se remarcó el sector circular correspondiente.



Este proceso se hace con todos los ángulos hasta obtener la gráfica circular.

El gráfico está dividido en cinco partes de diferentes colores que corresponden al deporte que se realizó en el deportivo, en la leyenda se indica qué color corresponde a cada deporte. De modo que se distingue que la mayoría practica el fútbol, que el deporte que menos practican es el basquetbol.

Para tener más información se le agregaron los



valores en porcentajes redondeados que ya se habían calcularon.

Con los porcentajes es más fácil para interpretar la información de los deportes que realizaron las personas y así planear actividades extras en los diferentes deportes y saber si estas tendrán éxito o no.

Una tabla con pictogramas muestra el comportamiento de los valores en cierto periodo de tiempo, algo que no se puede hacer con la gráfica circular, pues se tendría que hacer una gráfica por cada día de la semana. Con la gráfica circular es más fácil y rápido visualizar la información, pero se puede construir si los valores que se usan suman el total o 100 por ciento (%), cada valor representado por sector es una parte de dicho total, es decir, un porcentaje de este. Al sumar los valores, dan como resultado ese total.

Ejemplo: Se solicitó a un grupo de personas que indicaran su color favorito, los resultados fueron negro 6, azul 5, amarillo 5 y rojo 4. Elaborar una gráfica circular a partir de dichos resultados.

R. Se calcula la frecuencia absoluta y relativa, se colocan en una tabla.

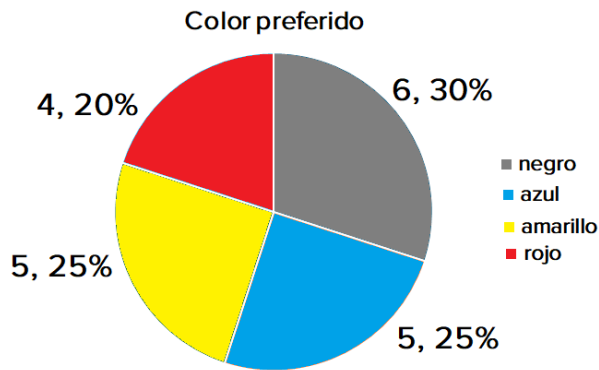
Color preferido	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
negro	6	30%
azul	5	25%
amarillo	5	25%
rojo	4	20%
Totales	20	100%

Frecuencia relativa:
del dato “negro”: $\frac{6}{20} \times 100 = 30\%$;
del dato “azul”: $\frac{5}{20} \times 100 = 25\%$;
del dato “amarillo”: $\frac{5}{20} \times 100 = 25\%$;
del dato “rojo”: $\frac{4}{20} \times 100 = 20\%$

Ahora se calcula el tamaño de cada uno de los sectores del círculo, es decir su medida en grados.

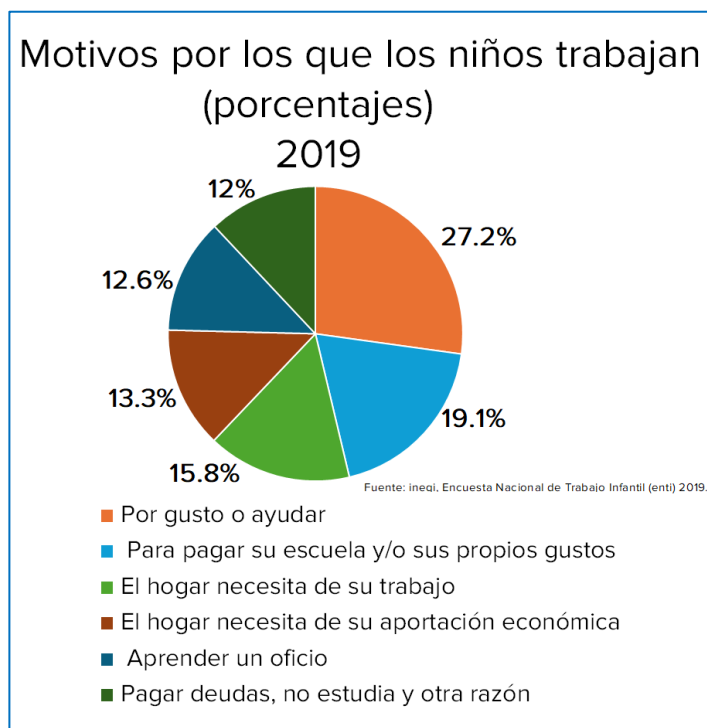
Color preferido	Frecuencia absoluta	Grados	Frecuencia relativa
negro	6	$\frac{360}{20} \times 6 = 108^\circ$	30%
azul	5	$\frac{360}{20} \times 5 = 90^\circ$	25%
amarillo	5	$\frac{360}{20} \times 5 = 90^\circ$	25%
rojo	4	$\frac{360}{20} \times 4 = 72^\circ$	20%
Totales	20		100%

Ahora se hace la gráfica.



El color preferido es el negro, aunque no por mucho. El color que menos prefieren es el rojo.

Ahora que ya conoces las gráficas circulares o de pastel, puedes buscarlas en distintas fuentes confiables y practicar su descripción e interpretación. Una de las fuentes confiables de información es el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), en su página de internet existen algunas gráficas de pastel en sus publicaciones que están dirigidas al público en general, para simplificar la información estadística y hacerla más fácil de comprender.



Se puede observar que:

- el total de entrevistados no se da a conocer;

- la encuesta fue hecha en 2019;

- la respuesta con mayor frecuencia fue "Por gusto o ayudar", ya que es el porcentaje más alto, aproximadamente 27 de cada 100 (27.2%);

-Se tiene que 12 de cada 100 (12%) dijeron que lo hacían "Para pagar deudas, no estudia y otra razón", esta fue la respuesta menos frecuente;

-La suma de los porcentajes es 100%.

Medidas de tendencia central: la media aritmética

Existen algunos tipos de mediciones que se pueden hacer sobre información estadística, estas resumen un conjunto de datos para dar una explicación más breve, entre ellas se encuentran las **medidas de tendencia central**. Las más utilizadas son la media aritmética, la mediana y la moda.

Estas resumen las características del conjunto de datos, muestran la localización del elemento promedio o típico del grupo de datos, alrededor del cual se centra el resto y son útiles, ya que comparan o interpretan valores entre sí y los obtenidos en dos o más grupos.

El **promedio o media aritmética** se usa con frecuencia en la vida diaria. Por ejemplo, al calcular el promedio de calificaciones, el promedio de nacimientos diarios en cierta región o país, entre otros.

El **promedio** es un valor que resume todos los datos de un conjunto y se simboliza como $\bar{X}$, se calcula sumando todos los valores del conjunto de datos y luego se divide entre el número de valores que se tienen. La fórmula es la siguiente:

$$\bar{X} = \frac{\text{suma de todos los valores del conjunto de datos}}{\text{número de valores}}$$

El promedio es el valor en torno al cual se agrupan los datos, por eso es una medida de tendencia central.

Por ejemplo: a) En un círculo de estudio aportaron para hacer un convivio. Ricardo dio \$80 pesos, Omar \$70 pesos, Claudia \$75 pesos, Georgina \$90 y Miguel cooperó con \$105. ¿Cuánto aportaron en promedio?

R. Es necesario usar la fórmula:

$$\bar{X} = \frac{\text{suma de todos los valores del conjunto de datos}}{\text{número de valores}} = \frac{80 + 70 + 75 + 90 + 105}{5} = \frac{420}{5} = 84$$

El resultado es $\bar{X} = 84$, esto significa que los cinco aportaron un promedio de 84 pesos cada uno.

b) En un centro de salud, la persona enfermera de pediatría tiene el registro de las estaturas de los 12 pacientes con la edad de 12 a 14 años; la información es 1.35 m, 1.38 m, 1.38 m, 1.39 m, 1.40 m, 1.43 m, 1.45 m, 1.57 m, 1.57 m, 1.60 m, 1.62 m, 1.65 m. ¿Cuál es la media aritmética?

R. Es necesario usar la fórmula:

$$\bar{X} = \frac{1.35+1.38+1.38+1.39+1.40+1.43+1.45+1.57+1.57+1.60+1.62+1.65}{12} = \frac{17.79}{12} = 1.4825$$

El resultado es $\bar{X} = 1.4825$ m.

Medidas de tendencia central: la mediana y la moda

La mediana es también una medida representativa de un conjunto de datos, no se requiere una fórmula, sino que se obtiene de manera directa del conjunto de datos.

La **mediana** es el dato que se encuentra en medio de un conjunto de datos que fue ordenado de manera ascendente. **Ejemplos:**

a) Calcular la mediana de los siguientes datos: 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

R. El conjunto ya está ordenado de menor a mayor.

Se observa que en los datos 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19; el número 15 se encuentra en la quinta posición, este se encuentra a la mitad del conjunto ordenado. La mediana en este conjunto de datos es 15.

b) Calcular la mediana de los siguientes datos: 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

R. El conjunto ya está ordenado de menor a mayor.

En el conjunto 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20; los números 15 y 16 se encuentran en el centro.

En este caso, para conocer la mediana se calcula la media o el promedio entre ambos: $\bar{X} = \frac{15+16}{2} = \frac{31}{2} = 15.5$; la mediana en este conjunto de datos es 15.5

c) Ordena la serie de datos de forma ascendente y obtén el valor de la mediana en el centro de los datos:
42, 50, 45, 41, 41, 42, 48, 43, 40, 49, 45, 42, 40, 42, 47

R. El conjunto no está ordenado de menor a mayor, pero al ordenarlo quedaría como:

40, 40, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 43, 45, 45, 47, 48, 49, 50

El dato que está en medio es 42, la mediana en este conjunto de datos es 42.

d) Ordena la serie de datos de forma ascendente y obtén el valor de la mediana en el centro de los datos: 250, 211, 198, 300, 224, 268, 259, 300

R. El conjunto no está ordenado de menor a mayor, pero al ordenarlo quedaría como:

198, 211, 224, 250, 259, 268, 300, 300

Los datos que están en medio son 250 y 259, así que la mediana en este conjunto de datos es el promedio de 250 y 259: $\bar{X} = \frac{250+259}{2} = \frac{509}{2} = 254.5$, la mediana en este conjunto de datos es 254.5

Generalmente cuando se escucha que algo está de moda, se refiere a algún comportamiento o tendencia actual; por ejemplo, el uso de algún tipo de prenda de ropa, algún cantante, un lugar más visitado, entre otras, es decir son los favoritos.

En un conjunto de datos, se le llama **moda** al dato más repetido. Por ejemplo, en el siguiente conjunto de datos: 3, 4, 8, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 3; el número 3 se repite cuatro veces, el número 4, seis veces y el número 8 solamente una vez. Entonces se puede decir que el número 4 es la moda en este conjunto de datos.

Ejemplos: a) El número de estrellas de los hoteles de una ciudad viene dado por el siguiente conjunto de datos: 3, 3, 4, 3, 4, 3, 1, 3, 4, 3, 3, 3, 2, 1, 3, 3, 3, 2, 3, 2, 2, 3, 3, 3. Hallar la moda.

R. Se observa que el dato 1 se repite dos veces, el dato 2 se repite cuatro veces, el dato 3 se repite 14 veces y el dato 4 se repite tres veces. Luego la moda de este conjunto de datos es el 3.

b) En un círculo de estudio, las personas educandas obtuvieron las siguientes calificaciones en Pensamiento matemático 1:

8.2, 7.5, 6.9, 9.1, 8.2, 4.6, 8.8, 2.5, 9.8, 7.9, 8.4, 6.9, 3.2, 8.6, 10, 9.8, 6.7, 7.8

Calcular la mediana y moda de los datos.

R. Primero se ordenan las calificaciones en forma ascendente:

2.5, 3.2, 4.6, 6.7, 6.9, 6.9, 7.5, 7.8, 7.9, 8.2, 8.2, 8.4, 8.6, 8.8, 9.1, 9.8, 9.8, 10

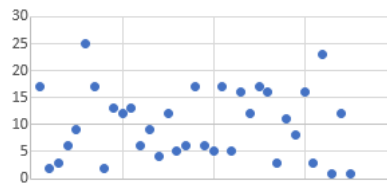
Los datos son 18, eso indica que la mediana es el promedio de las posiciones novena y décima, que tienen los valores 7.9 y 8.2: $\bar{X} = \frac{7.9+8.2}{2} = \frac{16.1}{2} = 8.05$, la mediana es 8.05.

Al observar los datos se tiene que los valores que más se repiten son el 6.9, el 8.2 y el 9.8, los tres se repiten dos veces cada uno. Así que, **este conjunto de datos tiene tres modas**, son 6.9, 8.2 y 9.8.

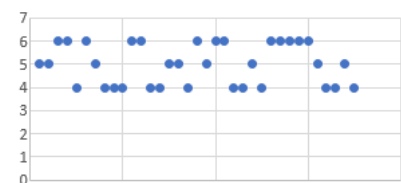
Medidas de dispersión: rango y desviación media

Las **medidas de dispersión** indican qué tanto son diferentes los datos entre sí, es decir, como indica su nombre, ayudan a identificar qué tan separados están los datos. Al utilizar las medidas de tendencia central y la dispersión se puede describir mejor el conjunto de datos.

Las siguientes gráficas corresponden al tiempo de espera (en minutos) de las líneas telefónicas de atención al cliente de dos empresas de telefonía.



Empresa A



Empresa B

- La dispersión debe de ser mayor en la empresa A ya que los datos son más separados.
- Se observa que la dispersión en la compañía B de los tiempos de espera en las llamadas será similar y alrededor de los 5 minutos.

El **rango** es una medida de dispersión, este muestra la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo del conjunto de datos que se estudia.

Retomando el ejemplo anterior de las calificaciones del círculo de estudio, la calificación mas baja (valor mínimo) es 2.5 y la más alta (valor máximo) es 10, el rango es entonces $10 - 2.5 = 7.5$

La **desviación media** es el promedio de qué tan distantes están los datos de la media, es decir, del centro. Se explica su cálculo mediante la siguiente situación: En una encuesta a 20 personas se les ha preguntado sobre el tiempo en horas que pasan frente a una pantalla, las repuestas son: 8, 5, 12, 14, 10, 8, 9, 10, 7, 6, 9, 12, 14, 12, 10, 8, 12, 9, 8, 12.

Para calcular la desviación media primero es necesario calcular el promedio:

$$\bar{X} = \frac{8+5+12+14+10+8+9+10+7+6+9+12+14+12+10+8+12+9+8+12}{20} = \frac{195}{20} = 9.75$$

Ya que es necesario saber las diferencias entre los datos y el promedio se hace una tabla en la que se colocan el tiempo en que se pasan frente a un pantalla (columna A, se ordenan de menor a mayor), el promedio de los datos (columna B), la diferencia entre la columna A y B (columna C) y por último la distancia (columna D).

Columna A	Columna B	Columna C	Columna D
Tiempo que pasan frente a una pantalla (horas)	Promedio	Diferencia entre los datos y el promedio	Distancia
5	9.75	$9.75 - 5 = 4.75$	4.75
6	9.75	$9.75 - 6 = 3.75$	3.75
7	9.75	$9.75 - 7 = 2.75$	2.75
8	9.75	$9.75 - 8 = 1.75$	1.75
8	9.75	$9.75 - 8 = 1.75$	1.75
8	9.75	$9.75 - 8 = 1.75$	1.75
8	9.75	$9.75 - 8 = 1.75$	1.75
9	9.75	$9.75 - 9 = 0.75$	0.75
9	9.75	$9.75 - 9 = 0.75$	0.75
9	9.75	$9.75 - 9 = 0.75$	0.75
10	9.75	$10 - 9.75 = 0.25$	0.25
10	9.75	$10 - 9.75 = 0.25$	0.25
10	9.75	$10 - 9.75 = 0.25$	0.25
12	9.75	$12 - 9.75 = 2.25$	2.25
12	9.75	$12 - 9.75 = 2.25$	2.25
12	9.75	$12 - 9.75 = 2.25$	2.25
12	9.75	$12 - 9.75 = 2.25$	2.25
12	9.75	$12 - 9.75 = 2.25$	2.25
14	9.75	$14 - 9.75 = 4.25$	4.25
14	9.75	$14 - 9.75 = 4.25$	4.25

Recuerda que en una resta es importante restar el menor al mayor, la desviación media es una distancia, así que en la columna C para los datos 10, 12 y 14, los cuales son mayores que el promedio, la resta fue del dato menos el promedio.

La desviación media es el promedio de las distancias de los datos con respecto de la media, es decir, se calcula el promedio de los valores de la columna D.

Desviación media =

$$\frac{4.75+3.75+2.75+1.75+1.75+1.75+0.75+0.75+0.75+0.25+0.25+0.25+2.25+2.25+2.25+2.25+2.25+4.25+4.25}{20} = \frac{41}{20} = 2.05$$

El valor de la desviación media es de 2.05, significa que los datos están separados entre sí, en promedio, por 2.05 horas.

Ejemplo: Observa la siguiente tabla con datos de las temperaturas de un estado al norte del país.

Mes	Temperatura	Mes	Temperatura
Enero	9.9 °C	Julio	24.5 °C
Febrero	13.4 °C	Agosto	24.5 °C
Marzo	15.4 °C	Septiembre	23 °C
Abril	19.3 °C	Octubre	20 °C
Mayo	22.8 °C	Noviembre	15.4 °C
Junio	26.4 °C	Diciembre	13.4 °C

Calcular su desviación media.

R. Primero se ordenan los datos, se obtiene la media aritmética y la diferencia

Mes	Temperatura	Promedio	Diferencia entre los datos y el promedio
Enero	9.9 °C	19 °C	19 °C – 9.9 °C = 9.1 °C
Febrero	13.4 °C	19 °C	19 °C – 13.4 °C = 5.6 °C
Diciembre	13.4 °C	19 °C	19 °C – 13.4 °C = 5.6 °C
Marzo	15.4 °C	19 °C	19 °C – 15.4 °C = 3.6 °C
Noviembre	15.4 °C	19 °C	19 °C – 15.4 °C = 3.6 °C
Abril	19.3 °C	19 °C	19.3 °C – 19 °C = 0.3 °C
Octubre	20 °C	19 °C	20 °C – 19 °C = 1 °C
Mayo	22.8 °C	19 °C	22.8 °C – 19 °C = 3.8 °C
Septiembre	23 °C	19 °C	23 °C – 19 °C = 4 °C
Julio	24.5 °C	19 °C	24.5 °C – 19 °C = 5.5 °C
Agosto	24.5 °C	19 °C	24.5 °C – 19 °C = 5.5 °C
Junio	26.4 °C	19 °C	26.4 °C – 19 °C = 7.4 °C
Total	228 °C		

Luego se obtiene el promedio de las distancias de los datos con respecto de la media, es decir, se calcula el promedio de los valores de la última columna.

Desviación media =

$$\frac{9.1 + 5.6 + 5.6 + 3.6 + 3.6 + 0.3 + 1 + 3.8 + 4 + 5.5 + 5.5 + 7.4}{12} = \frac{55}{12} = 4.58$$

El valor de la desviación media es de 4.58, significa que los datos están separados entre sí, en promedio, por 4.58 °C.